

# Estrategias de Reducción

**José de Jesús Lavalle Martínez**

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Facultad de Ciencias de la Computación  
Fundamentos de Lenguajes de Programación CCOS 255

Primavera 2020

## 1 Introducción

## 2 Estrategias de reducción

- Reducción de orden normal (RON)
- Reducción de orden aplicativo de izquierda a derecha (ROAD)
- Reducción de orden aplicativo de derecha a izquierda (ROADI)

## Observación 1

El término- $\lambda$   $(\lambda x.xx)((\lambda y.y)z)$  se puede reducir a  $(\lambda x.xx)z$ , pero también se puede reducir a  $((\lambda y.y)z)((\lambda y.y)z)$ .

## Observación 1

El término- $\lambda$   $(\lambda x.xx)((\lambda y.y)z)$  se puede reducir a  $(\lambda x.xx)z$ , pero también se puede reducir a  $((\lambda y.y)z)((\lambda y.y)z)$ . Así reducción- $\beta$  **no es determinista**.

## Definición 2

$$\frac{}{(\lambda x.M)N \rightarrow_{\beta} M[x := N]} \text{ BETA}$$

$$\frac{N \rightarrow_{\beta} N'}{MN \rightarrow_{\beta} MN'} \text{ MU}$$

$$\frac{M \rightarrow_{\beta} M'}{MN \rightarrow_{\beta} M'N} \text{ NU}$$

$$\frac{M \rightarrow_{\beta} M'}{(\lambda x.M) \rightarrow_{\beta} (\lambda x.M')} \text{ XI}$$

## Definición 2

$$\frac{}{(\lambda x.M)N \rightarrow_{\beta} M[x := N]} \text{ BETA} \qquad \frac{N \rightarrow_{\beta} N'}{MN \rightarrow_{\beta} MN'} \text{ MU}$$
$$\frac{M \rightarrow_{\beta} M'}{MN \rightarrow_{\beta} M'N} \text{ NU} \qquad \frac{M \rightarrow_{\beta} M'}{(\lambda x.M) \rightarrow_{\beta} (\lambda x.M')} \text{ XI}$$

## Observación 3

Reducción- $\beta$  no es determinista porque tenemos tres reglas para reducir una aplicación: BETA, NU y MU.

## Definición 2

$$\frac{}{(\lambda x.M)N \rightarrow_{\beta} M[x := N]} \text{ BETA} \qquad \frac{N \rightarrow_{\beta} N'}{MN \rightarrow_{\beta} MN'} \text{ MU}$$
$$\frac{M \rightarrow_{\beta} M'}{MN \rightarrow_{\beta} M'N} \text{ NU} \qquad \frac{M \rightarrow_{\beta} M'}{(\lambda x.M) \rightarrow_{\beta} (\lambda x.M')} \text{ XI}$$

## Observación 3

Reducción- $\beta$  no es determinista porque tenemos tres reglas para reducir una aplicación: BETA, NU y MU.

## Observación 4

Las reglas BETA, NU y MU se pueden ordenar en seis maneras distintas (3!).

## Definición 5

En el cálculo- $\lambda$  puro, una estrategia de reducción está determinada por el orden en que se aplican las reglas BETA, NU y MU.

En la práctica, de las seis sólo se usan tres.



# Reducción de orden normal (RON)

También llamada reducción **más izquierda y más externa**.

## Definición 6

Use primero BETA, luego NU y al final MU.

$$\textcircled{1} \frac{}{(\lambda x.M)N \rightarrow_{\beta} M[x := N]} \text{BETA}$$

$$\textcircled{2} \frac{M \rightarrow_{\beta} M'}{MN \rightarrow_{\beta} M'N} \text{NU}$$

$$\textcircled{3} \frac{N \rightarrow_{\beta} N'}{MN \rightarrow_{\beta} MN'} \text{MU}$$

También llamada reducción **más izquierda y más interna**.

## Definición 7

Use primero NU, luego MU y al final BETA.

$$\textcircled{1} \frac{M \rightarrow_{\beta} M'}{MN \rightarrow_{\beta} M'N} \text{ NU}$$

$$\textcircled{2} \frac{N \rightarrow_{\beta} N'}{MN \rightarrow_{\beta} MN'} \text{ MU}$$

$$\textcircled{3} \frac{}{(\lambda x.M)N \rightarrow_{\beta} M[x := N]} \text{ BETA}$$

También llamada reducción **más derecha y más interna**.

## Definición 8

Use primero MU, luego NU y al final BETA.

- $$\frac{N \rightarrow_{\beta} N'}{MN \rightarrow_{\beta} MN'} \quad \text{MU}$$
- $$\frac{M \rightarrow_{\beta} M'}{MN \rightarrow_{\beta} M'N} \quad \text{NU}$$
- $$\frac{}{(\lambda x.M)N \rightarrow_{\beta} M[x := N]} \quad \text{BETA}$$

## Observación 9

- Más externa significa que BETA se usa primero.

## Observación 9

- Más externa significa que BETA se usa primero.
- Más interna significa que BETA se usa al final.

## Observación 9

- Más externa significa que BETA se usa primero.
- Más interna significa que BETA se usa al final.
- Tomando como referencia la aplicación  $MN$ , más izquierda significa que se reduce primero  $M$  y luego  $N$ .

## Observación 9

- Más externa significa que BETA se usa primero.
- Más interna significa que BETA se usa al final.
- Tomando como referencia la aplicación  $MN$ , más izquierda significa que se reduce primero  $M$  y luego  $N$ .
- Tomando como referencia la aplicación  $MN$ , más derecha significa que se reduce primero  $N$  y luego  $M$ .

Las diferentes estrategias de reducción siempre llegarán a la misma forma normal, pero existen otras diferencias que debemos considerar.

## Observación 10

Considere la aplicación  $(\lambda x.M)N$  bajo los escenarios siguientes:

- La complejidad para reducir  $N$  es alta.
- La reducción de  $N$  no termina.
- $x$  no está libre en  $M$ .
- $x$  aparece libre en  $M$  muchas veces.



$$(\lambda x.M)N$$

- Si  $x$  no está libre en  $M$ , gana la reducción de orden normal. En particular, si la reducción de  $N$  no termina, las reducciones de orden aplicativo no terminan, pero la aplicación de orden normal sí termina.

$$(\lambda x.M)N$$

- Si  $x$  está libre muchas veces en  $M$ , probablemente gane la reducción de orden aplicativo, ya que la reducción de orden normal haría copias múltiples de  $N$ , las cuales se tendrán que reducir. En la reducción de orden normal, cada copia debe reducirse separadamente a su forma normal. Pero en las reducciones de orden aplicativo,  $N$  se reduce a su forma normal antes de sustituirse por  $x$ .

## ¿Cuál es la mejor estrategia? II

- Lo único que puede evitar que encontremos una forma normal es una secuencia infinita de reducciones.

- La reducción de orden normal retrasa toda reducción posible hasta que no le queda otra opción, por ello se puede evitar una secuencia infinita de reducciones.

- Se le llama reducción de orden normal porque si una forma normal existe, se garantiza que la reducción de orden normal la encuentra.

## ¿Cuál es la mejor estrategia? II

- Pero como no sabemos de antemano que término- $\lambda$  tenemos que reducir, no se puede decir cuál es la mejor estrategia.

## Ejemplo 11

$$\text{ROADI } (\lambda x_1. (\lambda x_2. x_1)) \mathbf{!}\Omega \rightarrow_{\beta}^{\text{Mu}} (\lambda x_1. (\lambda x_2. x_1)) \mathbf{!}\Omega \rightarrow_{\beta}^{\text{Mu}} \dots$$

## Ejemplo 11

$$\text{ROAID } (\lambda x_1. (\lambda x_2. x_1)) \Omega \rightarrow_{\beta}^{\text{Nu}} (\lambda x_2. \Omega) \Omega \rightarrow_{\beta}^{\text{Mu}} (\lambda x_2. \Omega) \Omega \rightarrow_{\beta}^{\text{Mu}} \dots$$



## Ejemplo 11

$$\text{RON } (\lambda x_1. (\lambda x_2. x_1)) \mid \Omega \xrightarrow{\beta} (\lambda x_2. \mid) \Omega \xrightarrow{\beta} \mid$$

# Ejemplos de estrategias de reducción I

$$\text{ROADI } (\lambda x_1. (\lambda x_2. x_1)) \mathbf{I} \Omega \rightarrow_{\beta}^{\text{MU}} (\lambda x_1. (\lambda x_2. x_1)) \mathbf{I} \Omega \rightarrow_{\beta}^{\text{MU}} \dots$$

$$\text{ROADID } (\lambda x_1. (\lambda x_2. x_1)) \mathbf{I} \Omega \rightarrow_{\beta}^{\text{NU}} (\lambda x_2. \mathbf{I}) \Omega \rightarrow_{\beta}^{\text{MU}} (\lambda x_2. \mathbf{I}) \Omega \rightarrow_{\beta}^{\text{MU}} \dots$$

$$\text{RON } (\lambda x_1. (\lambda x_2. x_1)) \mathbf{I} \Omega \rightarrow_{\beta}^{\text{BETA}} (\lambda x_2. \mathbf{I}) \Omega \rightarrow_{\beta}^{\text{BETA}} \mathbf{I}$$

## Ejemplo 12

$$\text{ROADI } (\lambda x_1 . x_2 x_1 x_1) ((\lambda x_3 . x_3) x_4) \xrightarrow{\beta^{\text{MU}}} (\lambda x_1 . x_2 x_1 x_1) x_4 \xrightarrow{\beta^{\text{BETA}}} x_2 x_4 x_4$$

## Ejemplo 12

$$\text{ROAID } (\lambda x_1 . x_2 x_1 x_1) ((\lambda x_3 . x_3) x_4) \rightarrow_{\beta}^{\text{MU}} (\lambda x_1 . x_2 x_1 x_1) x_4 \rightarrow_{\beta}^{\text{BETA}} x_2 x_4 x_4$$

## Ejemplo 12

$$\begin{aligned} \text{RON } (\lambda x_1 . x_2 x_1 x_1) ((\lambda x_3 . x_3) x_4) &\rightarrow_{\beta}^{\text{BETA}} \\ x_2 ((\lambda x_3 . x_3) x_4) ((\lambda x_3 . x_3) x_4) &\rightarrow_{\beta}^{\text{NU}} x_2 x_4 ((\lambda x_3 . x_3) x_4) \rightarrow_{\beta}^{\text{MU}} \\ x_2 x_4 x_4 & \end{aligned}$$

## Ejemplos de estrategias de reducción II

$$\text{ROADI } (\lambda x_1 . x_2 x_1 x_1) ((\lambda x_3 . x_3) x_4) \rightarrow_{\beta}^{\text{MU}} (\lambda x_1 . x_2 x_1 x_1) x_4 \rightarrow_{\beta}^{\text{BETA}} x_2 x_4 x_4$$

$$\text{ROADID } (\lambda x_1 . x_2 x_1 x_1) ((\lambda x_3 . x_3) x_4) \rightarrow_{\beta}^{\text{MU}} (\lambda x_1 . x_2 x_1 x_1) x_4 \rightarrow_{\beta}^{\text{BETA}} x_2 x_4 x_4$$

$$\text{RON } (\lambda x_1 . x_2 x_1 x_1) ((\lambda x_3 . x_3) x_4) \rightarrow_{\beta}^{\text{BETA}} x_2 ((\lambda x_3 . x_3) x_4) ((\lambda x_3 . x_3) x_4) \rightarrow_{\beta}^{\text{NU}} x_2 x_4 ((\lambda x_3 . x_3) x_4) \rightarrow_{\beta}^{\text{MU}} x_2 x_4 x_4$$

- 1 Implemente las funciones:

```
> val ron = fn : t -> t
> val roaid = fn : t -> t
> val roadi = fn : t -> t
```

- 2 Implemente sus respectivas cerraduras reflexivas y transitivas (ronaster, roaidaster y roadiaster) para que pueda tener estrategias de reducción de muchos pasos.
- 3 Pruebe sus implementaciones con los casos de prueba que están en el archivo <http://aleteya.cs.buap.mx/~jlavalle/flp/betabetasterCasosPrueba.txt> y también con los términos- $\lambda$  de los ejemplos 11 y 12.