Reducción-β en el Cálculo-λ Puro

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Fundamentos de Lenguajes de Programación CCOS 255

Primavera 2020

Contenido

Definición de reducción-β

Definición 1

La relación reducción-β, en símbolos $\rightarrow_\beta$, es inducida por el axioma para reducción-β, también llamado regla de reducción-β:

$$(\lambda x.M)N \rightarrow_\beta M[x := N]$$

Definición de reducción-β

Definición 1

La relación reducción-β, en símbolos $\rightarrow_\beta$, es inducida por el axioma para reducción-β, también llamado regla de reducción-β:

$$(\lambda x.M)N \rightarrow_\beta M[x := N]$$

y tres reglas adicionales para establecer que la regla de reducción-β se puede aplicar en cualquier lugar de un término-λ:

$$\frac{M \rightarrow_\beta M'}{(\lambda x.M) \rightarrow_\beta (\lambda x.M')}$$

$$\frac{M \rightarrow_\beta M'}{MN \rightarrow_\beta M'N}$$

$$\frac{N \rightarrow_\beta N'}{MN \rightarrow_\beta MN'}$$

Motivación $\rightarrow_\beta^*$

- Como nuestra experiencia nos muestra, evaluar o reducir una expresión a su mínima expresión no siempre se logra en un solo paso de reducción.

Motivación $\rightarrow_\beta^*$

- Como nuestra experiencia nos muestra, evaluar o reducir una expresión a su mínima expresión no siempre se logra en un solo paso de reducción.
- Como nuestro conocimiento nos demanda, debemos definir la cerradura reflexiva y transitiva de la relación reducción-β para poder realizar una secuencia de reducciones-β.

Definición de $\rightarrow_\beta^*$

Definición 2

La relación reflexiva y transitiva $\rightarrow_\beta^*$ de la relación $\rightarrow_\beta$ se define mediante:

$$\frac{}{M \rightarrow_\beta^* M}$$

$$\frac{M \rightarrow_\beta M'' \qquad M'' \rightarrow_\beta^* M'}{M \rightarrow_\beta^* M'}$$

Definición 3

Un *redex*$-\beta$ es un término-λ de la forma $(\lambda x.M)N$, *redex* es un acrónimo de *red*ucible *ex*pression.

Ejemplos de reducciones-β I

- $(\lambda x.x)z \rightarrow_\beta z$. La función identidad $(\lambda x.x)$ regresa su argumento sin cambiarlo.

Ejemplos de reducciones-β I

- $(\lambda x.yxx)z \rightarrow_\beta yzz$. Se duplica el argumento z.

Ejemplos de reducciones-β I

- $(\lambda x.y)z \rightarrow_\beta y$. La función constante y borra el argumento z y siempre regresa y.

Ejemplos de reducciones-β I

- $$\begin{aligned}((\lambda x.(\lambda y.zxy))z_1)z_2 &\rightarrow_\beta (\lambda y.zz_1y)z_2 \\ &\rightarrow_\beta (zz_1)z_2.\end{aligned}$$

  Podemos pensar a z como una función que necesita los argumentos z_1 y z_2 para poderse evaluar.

Ejemplos de reducciones-β II

- $$(\lambda x.x)(\lambda y.y)z \rightarrow_\beta (\lambda y.y)z$$
$$\rightarrow_\beta z.$$

El argumento a su vez puede ser una función, así que el cálculo-λ es de **alto orden**.

Ejemplos de reducciones-β II

- Al término-λ $(\lambda z.(\lambda x.z(zx)))$ a veces se le llama duplicador, suponga que z_1 es una función de un argumento y que z_2 es su argumento, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}((\lambda z.(\lambda x.z(zx)))z_1)z_2 &\rightarrow_\beta (\lambda x.z_1(z_1x)z_2)\\ &\rightarrow_\beta z_1(z_1z_2).\end{aligned}$$

Ejemplos de reducciones-β III

- El término-λ $(\lambda x.xx)((\lambda y.y)z)$ se puede reducir a $(\lambda x.xx)z$, pero también se puede reducir a $((\lambda y.y)z)((\lambda y.y)z)$. Así reducción-$\beta$ **no es determinista**. Sin embargo ambos términos se reducen a zz, así reducción-β no es determinista pero **es confluente**. Es decir si $M \rightarrow_\beta^* M'$ y $M \rightarrow_\beta^* M''$, entonces existe un N tal que $M' \rightarrow_\beta^* N$ y $M'' \rightarrow_\beta^* N$.

Ejemplos de reducciones-β III

- El término-λ $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ se reduce a si mismo.

$$(\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \rightarrow_\beta (\lambda x.xx)(\lambda x.xx).$$

Así reducción-β **no siempre termina**.

Definición forma normal-β

Definición 4

Un término-λ que no contiene un redex-β se dice que es una **forma normal-β** o sólo **forma normal**.

Definición forma normal-β

Definición 4

Un término-λ que no contiene un redex-β se dice que es una **forma normal-β** o sólo **forma normal**.

Los siguientes son ejemplos de formas normales-β: $x, (\lambda x.x), x(\lambda y.y)$.

Definición forma normal-β

Intuitivamente, una secuencia de reducciones-β modela un cálculo y una forma normal-β es el resultado de un cálculo, si tal resultado existe.

Términos-λ famosos

A un término-λ cerrado también se le llama combinador. Los siguientes son cuatro combinadores famosos:

1. $\mathsf{I} = (\lambda x.x)$,
2. $\mathsf{K} = (\lambda x.(\lambda y.x))$,
3. $\mathsf{S} = (\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.xz(yz))))$,
4. $\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$.

Ejercicios

1. Implemente las funciones:

```
> val beta = fn : t -> t
> val redex = fn : t -> bool
> val betaster = fn : t -> t
```

2. Realice a **mano** reducciones-β de un paso y multi pasos para cada uno de los casos de prueba que están en el archivo `http://aleteya.cs.buap.mx/~jlavalle/flp/betabetasterCasosPrueba.txt`.
3. Pruebe su implementación con los casos de prueba que están en el archivo `http://aleteya.cs.buap.mx/~jlavalle/flp/betabetasterCasosPrueba.txt`.