

# Propiedades semánticas de $\mathcal{T}$

**José de Jesús Lavalle Martínez**

<http://aleteya.cs.buap.mx/~jllavalle/>

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
Facultad de Ciencias de la Computación  
Licenciatura en Ciencias de la Computación  
Fundamentos de Lenguajes de Programación  
CCOS 255

Otoño 2020

1 Propiedades semánticas de  $\mathcal{T}$

2 Ejercicios

## Definición 1

La **relación de evaluación en un paso**  $\rightarrow$  sobre los términos de  $\mathcal{T}$  está definida mediante las siguientes reglas:

$$\frac{}{\text{if true then } t_2 \text{ else } t_3 \rightarrow t_2} \text{E-IFTRUE}$$

$$\frac{}{\text{if false then } t_2 \text{ else } t_3 \rightarrow t_3} \text{E-IFFALSE}$$

$$\frac{t_1 \rightarrow t'_1}{\text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 \rightarrow \text{if } t'_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3} \text{E-IF}$$

$$\frac{t_1 \rightarrow t'_1}{\text{succ } t_1 \rightarrow \text{succ } t'_1} \text{E-SUCC}$$

$$\frac{}{\text{pred } 0 \rightarrow 0} \text{E-PREDZERO}$$

$$\frac{}{\text{pred } (\text{succ } nv_1) \rightarrow nv_1} \text{E-PREDSUCC}$$

$$\frac{t_1 \rightarrow t'_1}{\text{pred } t_1 \rightarrow \text{pred } t'_1} \text{E-PRED}$$

$$\frac{}{\text{iszero } 0 \rightarrow \text{true}} \text{E-ISZEROZERO}$$

$$\frac{}{\text{iszero } (\text{succ } nv_1) \rightarrow \text{false}} \text{E-ISZEROSUCC}$$

$$\frac{t_1 \rightarrow t'_1}{\text{iszero } t_1 \rightarrow \text{iszero } t'_1} \text{E-ISZERO}$$

# La evaluación en un paso es determinista I

## Teorema 2 (La evaluación en un paso es determinista)

Si  $t \rightarrow t'$  y  $t \rightarrow t''$  entonces  $t' = t''$ .

# La evaluación en un paso es determinista I

## Teorema 2 (La evaluación en un paso es determinista)

Si  $t \rightarrow t'$  y  $t \rightarrow t''$  entonces  $t' = t''$ .

**Demostración:** Sobre la estructura de  $t$ .

## Teorema 2 (La evaluación en un paso es determinista)

Si  $t \rightarrow t'$  y  $t \rightarrow t''$  entonces  $t' = t''$ .

**Demostración:** Sobre la estructura de  $t$ .

- $t = \text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3$ .

## Teorema 2 (La evaluación en un paso es determinista)

Si  $t \rightarrow t'$  y  $t \rightarrow t''$  entonces  $t' = t''$ .

**Demostración:** Sobre la estructura de  $t$ .

- $t = \text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3$ .
  - Si  $t_1 = \text{true}$  evaluando a  $t$  obtenemos  $t \xrightarrow{\text{E-IFTRUE}} t_2$ . Note que no se puede aplicar E-IFFALSE ya que  $t_1 \neq \text{false}$ , tampoco podemos aplicar E-IF ya que esta regla tiene como premisa evaluar a  $t_1$ , pero no existe alguna regla de evaluación en un paso para true, así evaluando nuevamente a  $t$  obtenemos  $t \xrightarrow{\text{E-IFTRUE}} t_2$ , claramente  $t_2 = t_2$ .

## Teorema 2 (La evaluación en un paso es determinista)

Si  $t \rightarrow t'$  y  $t \rightarrow t''$  entonces  $t' = t''$ .

**Demostración:** Sobre la estructura de  $t$ .

- $t = \text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3$ .

- Si  $t_1 = \text{false}$  evaluando a  $t$  obtenemos  $t \xrightarrow{\text{E-IFFALSE}} t_3$ . Note que no se puede aplicar E-IFTRUE ya que  $t_1 \neq \text{true}$ , tampoco podemos aplicar E-IF ya que esta regla tiene como premisa evaluar a  $t_1$ , pero no existe alguna regla de evaluación en un paso para  $\text{false}$ , así evaluando nuevamente a  $t$  obtenemos  $t \xrightarrow{\text{E-IFFALSE}} t_3$ , claramente  $t_3 = t_3$ .



## La evaluación en un paso es determinista II

- $t = \text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3$ .
- Si  $t_1 \neq \text{true}$  y  $t_1 \neq \text{false}$  entonces evaluando a  $t$  obtenemos

$t \xrightarrow{\text{E-IF}} \text{if } t'_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3$  al aplicar la regla

$$\frac{t_1 \rightarrow t'_1}{\text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 \rightarrow \text{if } t'_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3} \text{E-IF}$$
. Si volvemos a evaluar a  $t$  obtenemos  $t \xrightarrow{\text{E-IF}} \text{if } t''_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3$  por la misma regla E-IF, aplicando la hipótesis de inducción a  $t_1 \rightarrow t'_1$  y  $t_1 \rightarrow t''_1$  tenemos que  $t'_1 = t''_1$ . Por lo tanto tenemos que:

$\text{if } t'_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 = \text{if } t''_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3$ .

- $t = \text{succ } t_1$  entonces evaluando a  $t$  obtenemos  $t \xrightarrow{\text{E-SUCC}} \text{succ } t'_1$  al aplicar la regla  $\frac{t_1 \rightarrow t'_1}{\text{succ } t_1 \rightarrow \text{succ } t'_1} \text{E-SUCC}$ . Si volvemos a evaluar a  $t$  obtenemos  $t \xrightarrow{\text{E-SUCC}} \text{succ } t''_1$  por la misma regla E-SUCC, aplicando la hipótesis de inducción a  $t_1 \rightarrow t'_1$  y  $t_1 \rightarrow t''_1$  tenemos que  $t'_1 = t''_1$ . Por lo tanto tenemos que:

$$\text{succ } t' = \text{succ } t''.$$

# La evaluación en un paso es determinista IV

- $t = \text{pred } t_1$ .
  - Si  $t_1 = 0$  evaluando a  $t$  obtenemos  $t \xrightarrow{\text{E-PREDZERO}} 0$ . Note que no se puede aplicar E-PREDSUCC ya que  $t_1 \neq (\text{succ } nv_1)$ , tampoco podemos aplicar E-PRED ya que esta regla tiene como premisa evaluar a  $t_1$ , pero no existe alguna regla de evaluación en un paso para 0, así evaluando nuevamente a  $t$  obtenemos  $t \xrightarrow{\text{E-PREDZERO}} 0$ , claramente  $0 = 0$ .

# La evaluación en un paso es determinista IV

- $t = \text{pred } t_1$ .

- Si  $t_1 = (\text{succ } nv_1)$  evaluando a  $t$  obtenemos  $t \xrightarrow{\text{E-PREDSUCC}} nv_1$ . Note que no se puede aplicar E-PREDZERO ya que  $t_1 \neq 0$ , tampoco podemos aplicar E-PRED ya que esta regla tiene como premisa evaluar a  $t_1$ , pero no existe alguna regla de evaluación en un paso para  $(\text{succ } nv_1)$  (aquí es importante aclarar que existe la regla para  $\text{succ } t_1$ , es decir el sucesor de un término, no del valor numérico  $nv_1$ ), así evaluando nuevamente a  $t$  obtenemos  $t \xrightarrow{\text{E-PREDSUCC}} nv_1$ , claramente  $nv_1 = nv_1$ .

- $t = \text{pred } t_1$ .
  - Si  $t_1 \neq 0$  y  $t_1 \neq (\text{succ } nv_1)$  entonces evaluando a  $t$  obtenemos  $t \xrightarrow{\text{E-PRED}} \text{pred } t'_1$  al aplicar la regla  $\frac{t_1 \rightarrow t'_1}{\text{pred } t_1 \rightarrow \text{pred } t'_1} \text{E-PRED}$ . Si volvemos a evaluar a  $t$  obtenemos  $t \xrightarrow{\text{E-PRED}} \text{pred } t''_1$  por la misma regla E-PRED, aplicando la hipótesis de inducción a  $t_1 \rightarrow t'_1$  y  $t_1 \rightarrow t''_1$  tenemos que  $t'_1 = t''_1$ . Por lo tanto tenemos que:

$$\text{pred } t' = \text{pred } t''.$$

# La evaluación en un paso es determinista VI

- $t = \text{iszero } t_1$ .
  - Si  $t_1 = 0$  evaluando a  $t$  obtenemos  $t \xrightarrow{\text{E-ISZEROZERO}} \text{true}$ . Note que no se puede aplicar E-ISZEROSUCC ya que  $t_1 \neq (\text{succ } nv_1)$ , tampoco podemos aplicar E-ISZERO ya que esta regla tiene como premisa evaluar a  $t_1$ , pero no existe alguna regla de evaluación en un paso para 0, así evaluando nuevamente a  $t$  obtenemos  $t \xrightarrow{\text{E-ISZEROZERO}} \text{true}$ , claramente  $\text{true} = \text{true}$ .

# La evaluación en un paso es determinista VI

- $t = \text{iszero } t_1$ .

- Si  $t_1 = (\text{succ } nv_1)$  evaluando a  $t$  obtenemos  $t \xrightarrow{\text{E-ISZEROSUCC}} \text{false}$ . Note que no se puede aplicar E-ISZEROZERO ya que  $t_1 \neq 0$ , tampoco podemos aplicar E-ISZERO ya que esta regla tiene como premisa evaluar a  $t_1$ , pero no existe alguna regla de evaluación en un paso para  $(\text{succ } nv_1)$  (aquí es importante aclarar que existe la regla para  $\text{succ } t_1$ , es decir el sucesor de un término, no del valor numérico  $nv_1$ ), así evaluando nuevamente a  $t$  obtenemos  $t \xrightarrow{\text{E-ISZEROSUCC}} \text{false}$ , claramente  $\text{false} = \text{false}$ .

- $t = \text{iszero } t_1$ .

- Si  $t_1 \neq 0$  y  $t_1 \neq (\text{succ } \text{nv}_1)$  entonces evaluando a  $t$  obtenemos

$t \xrightarrow{\text{E-ISZERO}} \text{iszero } t'_1$  al aplicar la regla  $\frac{t_1 \rightarrow t'_1}{\text{iszero } t_1 \rightarrow \text{iszero } t'_1} \text{E-ISZERO}$ .

Si volvemos a evaluar a  $t$  obtenemos  $t \xrightarrow{\text{E-ISZERO}} \text{iszero } t''_1$  por la misma regla E-ISZERO, aplicando la hipótesis de inducción a  $t_1 \rightarrow t'_1$  y  $t_1 \rightarrow t''_1$  tenemos que  $t'_1 = t''_1$ . Por lo tanto tenemos que:

$$\text{iszero } t' = \text{iszero } t''.$$



## Definición 3

Los **valores** del lenguaje  $\mathcal{T}$  están dados por la siguiente gramática:

$$\begin{aligned}v &::= \text{true}|\text{false}|nv \\nv &::= 0|\text{succ } nv\end{aligned}$$

## Definición 4

Un término  $t$  está en **forma normal** si ninguna regla de evaluación se puede aplicar a él, es decir, si no existe  $t'$  tal que  $t \rightarrow t'$ . También decimos que “ $t$  es una forma normal” como abreviatura de “ $t$  es un término en forma normal”.

## Teorema 5

Todo valor  $v$  está en forma normal.

**Demostración:** Por casos de acuerdo a la forma de  $v$ , siguiendo la Definición 3.

- $v = \text{true}$ . Como se puede observar en la Definición 1 no existe ninguna regla de evaluación cuyo lado izquierdo empate con  $\text{true}$ , por lo tanto  $\text{true}$  está en forma normal.

## Teorema 5

Todo valor  $v$  está en forma normal.

**Demostración:** Por casos de acuerdo a la forma de  $v$ , siguiendo la Definición 3.

- $v = \text{false}$ . Como se puede observar en la Definición 1 no existe ninguna regla de evaluación cuyo lado izquierdo empate con  $\text{false}$ , por lo tanto  $\text{false}$  está en forma normal.

## Teorema 5

Todo valor  $v$  está en forma normal.

**Demostración:** Por casos de acuerdo a la forma de  $v$ , siguiendo la Definición 3.

- $v = 0$ . Como se puede observar en la Definición 1 no existe ninguna regla de evaluación cuyo lado izquierdo empate con 0, por lo tanto 0 está en forma normal.

## Teorema 5

Todo valor  $v$  está en forma normal.

**Demostración:** Por casos de acuerdo a la forma de  $v$ , siguiendo la Definición 3.

- $v = \text{succ } nv$ . Como se puede observar en la Definición 1 **SÍ** existe una regla cuyo lado izquierdo empata con  $\text{succ } nv$ , por lo tanto  $\text{succ } nv$  **NO** está en forma normal.

## Teorema 5

Todo valor  $v$  está en forma normal.

**Demostración:** Por casos de acuerdo a la forma de  $v$ , siguiendo la Definición 3.

- $v = \text{true}$ . Como se puede observar en la Definición 1 no existe ninguna regla de evaluación cuyo lado izquierdo empate con  $\text{true}$ , por lo tanto  $\text{true}$  está en forma normal.
- $v = \text{false}$ . Como se puede observar en la Definición 1 no existe ninguna regla de evaluación cuyo lado izquierdo empate con  $\text{false}$ , por lo tanto  $\text{false}$  está en forma normal.
- $v = 0$ . Como se puede observar en la Definición 1 no existe ninguna regla de evaluación cuyo lado izquierdo empate con  $0$ , por lo tanto  $0$  está en forma normal.
- $v = \text{succ } nv$ . Como se puede observar en la Definición 1 **SÍ** existe una regla cuyo lado izquierdo empata con  $\text{succ } nv$ , por lo tanto  $\text{succ } nv$  **NO** está en forma normal.

## Teorema 6

Si  $t$  está en forma normal entonces  $t$  es un valor.



## Teorema 6

Si  $t$  está en forma normal entonces  $t$  es un valor.

**Demostración:** Usaremos la contrapositiva para hacer la demostración, es decir, demostraremos que si  $t$  no es un valor entonces  $t$  no está en forma normal.

## Teorema 6

Si  $t$  está en forma normal entonces  $t$  es un valor.

**Demostración:** Usaremos la contrapositiva para hacer la demostración, es decir, demostraremos que si  $t$  no es un valor entonces  $t$  no está en forma normal.

- Si  $t = \text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3$  entonces se pueden aplicar alguna de las reglas de evaluación  $E\text{-IFTRUE}$ ,  $E\text{-IFFALSE}$  o  $E\text{-IF}$ , por lo tanto  $t$  no está en forma normal.

## Teorema 6

Si  $t$  está en forma normal entonces  $t$  es un valor.

**Demostración:** Usaremos la contrapositiva para hacer la demostración, es decir, demostraremos que si  $t$  no es un valor entonces  $t$  no está en forma normal.

- Si  $t = \text{pred } t_1$  entonces se pueden aplicar alguna de las reglas de evaluación  $E\text{-PREDZERO}$ ,  $E\text{-PREDSUCC}$  o  $E\text{-PRED}$ , por lo tanto  $t$  no está en forma normal.

## Toda forma normal es un valor II

- Si  $t = \text{iszero } t_1$  entonces se pueden aplicar alguna de las reglas de evaluación  $E\text{-ISZEROZERO}$ ,  $E\text{-ISZEROSUCC}$  o  $E\text{-ISZERO}$ , por lo tanto  $t$  no está en forma normal.

- Si  $t = \text{succ } t_1$  podemos aplicar la regla E-SUCC y por lo tanto concluiríamos que  $t$  no está en forma normal. Note que aquí tenemos **ambigüedad** ya que de acuerdo con la Definición 3  $\text{succ } nV$  es un valor el cual es un caso especial de  $\text{succ } t_1$ . Es decir, un valor numérico  $nV$  o es 0 o es la composición de un número arbitrario de  $\text{succ}$  aplicados a 0. Mientras que  $\text{succ } t_1$  es la aplicación de  $\text{succ}$  a cualquier término en  $\mathcal{T}$ .

## Definición 7

La relación de **evaluación en múltiples pasos**  $\rightarrow^*$  es la cerradura reflexiva y transitiva de la relación de evaluación en un paso. Es decir es la relación más pequeña que cumple las siguientes reglas.

$$\frac{}{t \rightarrow^* t}$$
$$\frac{t \rightarrow t'}{t \rightarrow^* t'}$$
$$\frac{t \rightarrow t'' \quad t'' \rightarrow^* t'}{t \rightarrow^* t'}$$

## Teorema 8

Sean  $u$  y  $u'$  formas normales, si  $t \rightarrow^* u$  y  $t \rightarrow^* u'$  entonces  $u = u'$ .

**Demostración:** Por inducción sobre la definición de evaluación en múltiples pasos (Definición 7).

- $\overline{t \rightarrow^* t}$ , tenemos que  $t \rightarrow^* u$ , lo cual significa que  $u$  se derivó en cero pasos, por lo tanto  $t = u$ . Si volvemos a evaluar tenemos que  $t \rightarrow^* u'$ , así necesariamente  $t = u'$ , pero  $t = u$ , por lo tanto  $u = u'$ .

## Teorema 8

Sean  $u$  y  $u'$  formas normales, si  $t \rightarrow^* u$  y  $t \rightarrow^* u'$  entonces  $u = u'$ .

**Demostración:** Por inducción sobre la definición de evaluación en múltiples pasos (Definición 7).

- $\frac{t \rightarrow t'}{t \rightarrow^* t'}$ , tenemos que  $t \rightarrow^* u$ , lo cual significa que  $u$  se derivó en un paso. Si volvemos a evaluar tenemos que  $t \rightarrow^* u'$ , pero como la evaluación en un paso es determinista, entonces  $u = u'$ .



- $\frac{t \rightarrow t'' \quad t'' \rightarrow^* t'}{t \rightarrow^* t'}$ , tenemos que  $t \rightarrow^* u$ , lo cual significa que  $u$  se derivó en dos pasos o más, pero eso es gracias a que  $t \rightarrow t''$  y  $t'' \rightarrow^* u$ . Si volvemos a evaluar tenemos que  $t \rightarrow^* u'$ , pero eso es gracias a que  $t \rightarrow t'''$  y  $t''' \rightarrow^* u'$ . Como la evaluación en un paso es determinista tenemos que  $t'' = t'''$ , ahora aplicando la hipótesis de inducción a  $t'' \rightarrow^* u$  y a  $t''' \rightarrow^* u'$ , concluimos que  $u = u'$ .

## Teorema 9 (Terminación de evaluación)

Para todo término  $t$  existe una forma normal  $t'$  tal que  $t \rightarrow^* t'$ .

**Demostración:** Por inducción sobre la estructura de  $t$ .

- $t = \text{true}$ ; por el Teorema 5 como  $\text{true}$  es un valor entonces está en forma normal, lo cual quiere decir que se aplicó la regla de evaluación en cero pasos  $\overline{t \rightarrow^* t}$ .
- $t = \text{false}$ ;
- $t = 0$ ;
- $t = \text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3$ ; aplicando la regla  $\frac{t \rightarrow t'' \quad t'' \rightarrow^* t'}{t \rightarrow^* t'}$  tenemos tres casos:
  - Si  $t_1 = \text{true}$  entonces por la regla E-IFTRUE tenemos que  $\text{if true then } t_2 \text{ else } t_3 \rightarrow t_2$ , pero por hipótesis de inducción  $t_2 \rightarrow^* t'$ , donde  $t'$  está en forma normal.

# Terminación de evaluación II

- Si  $t_1 = \text{false}$  entonces por la regla E-IFFALSE tenemos que  $\text{if false then } t_2 \text{ else } t_3 \rightarrow t_3$ , pero por hipótesis de inducción  $t_3 \rightarrow^* t'$ , donde  $t'$  está en forma normal.
- Si  $t_1 \neq \text{true}$  y  $\text{if } t_1 \neq \text{false}$  entonces por la regla E-IF tenemos que  $\text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 \rightarrow \text{if } t'_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3$ , dado que  $t_1 \rightarrow t'_1$ , ahora por hipótesis de inducción  $\text{if } t'_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 \rightarrow^* t'$ , donde  $t'$  está en forma normal.
- $t = \text{succ } t_1$ ;
- $t = \text{pred } t_1$ ;
- $t = \text{iszero } t_1$ ;

- 1 Termine la demostración del Teorema 8.
- 2 Proponga una sintaxis y una semántica para que las demostraciones de los Teoremas 2, 5, 6, 8 y 9 sean completamente correctas.