Semántica de $\mathcal{LTA}$ I

José de Jesús Lavalle Martínez
http://aleteya.cs.buap.mx/~jlavalle/

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Licenciatura en Ciencias de la Computación
Fundamentos de Lenguajes de Programación
CCOS 255

Otoño 2020

Contenido

Motivación I

¿Por qué es importante una sintaxis y una semántica formal para el $\mathcal{LTA}$?

Motivación I

¿Por qué es importante una sintaxis y una semántica formal para el $\mathcal{LTA}$?

Con respecto a la sintaxis formal, ésta nos permite:

Motivación I

¿Por qué es importante una sintaxis y una semántica formal para el $\mathcal{LTA}$?

Con respecto a la sintaxis formal, ésta nos permite:

1. combinar los símbolos del alfabeto correctamente,

Motivación I

¿Por qué es importante una sintaxis y una semántica formal para el $\mathcal{LTA}$?

Con respecto a la sintaxis formal, ésta nos permite:

1. combinar los símbolos del alfabeto correctamente,
2. definir funciones recursivas para razonar sobre los elementos del lenguaje.

Motivación I

¿Por qué es importante una sintaxis y una semántica formal para el $\mathcal{LTA}$?

Con respecto a la sintaxis formal, ésta nos permite:

1. combinar los símbolos del alfabeto correctamente,
2. definir funciones recursivas para razonar sobre los elementos del lenguaje.
3. definir diferentes órdenes parciales entre los elementos del lenguaje, para poder hacer demostraciones por inducción.

Motivación II

Con respecto a la semántica formal:

Motivación II

Con respecto a la semántica formal:

1. Elimina la ambigüedad que existiría sin este tipo de significado.

Motivación II

Con respecto a la semántica formal:

1. Elimina la ambigüedad que existiría sin este tipo de significado.
2. Nos permite razonar sobre las propiedades semánticas que tiene el lenguaje.

Motivación II

Con respecto a la semántica formal:

1. Elimina la ambigüedad que existiría sin este tipo de significado.
2. Nos permite razonar sobre las propiedades semánticas que tiene el lenguaje.
3. Define una función que es computable.

Recordemos la sintaxis de $\mathcal{LTA}$:

$$
\begin{aligned}
d &::= 0|1|\cdots|9\\
n &::= d|nd\\
e &::= n|(e_i+e_d)|(e_i-e_d)|(e_i*e_d)
\end{aligned}
$$

Definición 1

Sea $e \in \mathcal{LTA}$ definimos el tamaño de e (el número de nodos que tiene su árbol de sintaxis abstracta), en símbolos $size(e)$, de la siguiente manera.

$$size(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e = d, \\ size(n) + size(d) + 1 & \text{si } e = nd, \\ size(e_i) + size(e_d) + 1 & \text{si } e = (e_i \diamond e_d). \end{cases}$$

De aquí en adelante $\diamond \in \{+, -, *\}$.

Definición 2

Sea $e \in \mathcal{LTA}$ definimos la profundidad de e (la profundidad que tiene su árbol de sintaxis abstracta), en símbolos $depth(e)$, de la siguiente manera.

$$depth(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e = d, \\ \max\{depth(n), depth(d)\} + 1 & \text{si } e = nd, \\ \max\{depth(e_i), depth(e_d)\} + 1 & \text{si } e = (e_i \diamond e_d). \end{cases}$$

Definición 3

Sea $e \in \mathcal{LTA}$ definimos el conjunto de subtérminos inmediatos de e, en símbolos $immsubt(e)$, de la siguiente manera.

$$immsubt(e) = \begin{cases} \{\} & \text{si } e = d, \\ \{n, d\} & \text{si } e = nd, \\ \{e_i, e_d\} & \text{si } e = (e_i \diamond e_d). \end{cases}$$

Diferentes tipos de inducción

- Inducción sobre $\mathbb{N}$: Si $P(0)$ se cumple y si dado $P(i)$ podemos demostrar $P(i+1)$, entonces $P(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. A $P(i)$ se le llama **Hipótesis de Inducción**.

Diferentes tipos de inducción

- Inducción sobre $size(e)$: Si para todo término e' con $size(e') = 1$ se cumple $P(e')$ y si dado $P(e'')$ podemos demostrar que $P(e''')$ con $size(e'') < size(e''')$, entonces $P(e)$ se cumple para todo $e \in \mathcal{L}$. A $P(e'')$ se le llama **Hipótesis de Inducción**.

Diferentes tipos de inducción

- Inducción sobre $depth(e)$: Si para todo término e' con $depth(e') = 1$ se cumple $P(e')$ y si dado $P(e'')$ podemos demostrar que $P(e''')$ con $depth(e'') < depth(e''')$, entonces $P(e)$ se cumple para todo $e \in \mathcal{L}$. A $P(e'')$ se le llama **Hipótesis de Inducción**.

Diferentes tipos de inducción

- Inducción estructural: Si para todo término e' con $immsubt(e') = \{\}$ se cumple $P(e')$ y si para todo $e'' \in immsubt(e''')$ dado $P(e'')$ podemos demostrar que $P(e''')$, entonces $P(e)$ se cumple para todo $e \in \mathcal{L}$. A $P(e'')$ se le llama **Hipótesis de Inducción**.

Recordemos la semántica de $\mathcal{LTA}$.

$$[\![]\!] : \mathcal{LTA} \to \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
[\![0]\!] &= 0, \ldots, [\![9]\!] = 9 \\
[\![nd]\!] &= (([\![n]\!]*10)+[\![d]\!]) \\
[\![(e_i+e_d)]\!] &= ([\![e_i]\!]+[\![e_d]\!]) \\
[\![(e_i-e_d)]\!] &= ([\![e_i]\!]-[\![e_d]\!]) \\
[\![(e_i*e_d)]\!] &= ([\![e_i]\!]*[\![e_d]\!])
\end{aligned}$$

Todo término aritmético tiene un significado

Teorema 4

Para todo $e \in \mathcal{LTA}$, existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $[\![e]\!] = z$.

Todo término aritmético tiene un significado

Teorema 4

Para todo $e \in \mathcal{LTA}$, existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $[\![e]\!] = z$.

Demostración: por inducción sobre el tamaño de e.

Todo término aritmético tiene un significado

Teorema 4

Para todo $e \in \mathcal{LTA}$, existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $[\![e]\!] = z$.

Demostración: por inducción sobre el tamaño de e.

Hipótesis de inducción: Si $size(e) = k$, entonces $[\![e]\!] = z_e$.

Todo término aritmético tiene un significado

Teorema 4

Para todo $e \in \mathcal{LTA}$, existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $[\![e]\!] = z$.

Demostración: por inducción sobre el tamaño de e.

Hipótesis de inducción: Si $size(e) = k$, entonces $[\![e]\!] = z_e$.

$e = d$: $[\![d]\!] = z_d$.

Todo término aritmético tiene un significado

Teorema 4

Para todo $e \in \mathcal{LTA}$, existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $[\![e]\!] = z$.

Demostración: por inducción sobre el tamaño de e.

Hipótesis de inducción: Si $size(e) = k$, entonces $[\![e]\!] = z_e$.

$e = nd$: $[\![nd]\!] = (([\![n]\!]*10)+[\![d]\!])$, por la definición de $size$: $size(n) < size(nd)$, así por hipótesis de inducción tenemos: $[\![n]\!] = z_n$, de tal manera que $(([\![n]\!]*10)+[\![d]\!]) = ((z_n * 10) + z_d) \in \mathbb{Z}$.

Todo término aritmético tiene un significado

Teorema 4

Para todo $e \in \mathcal{LTA}$, existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $[\![e]\!] = z$.

Demostración: por inducción sobre el tamaño de e.

Hipótesis de inducción: Si $size(e) = k$, entonces $[\![e]\!] = z_e$.

$e = (e_i \diamond e_d)$: Donde $\diamond \in \{+, -, *\}$. $[\![(e_i \diamond e_d)]\!] = ([\![e_i]\!] \diamond [\![e_d]\!])$, nuevamente por la definición de $size$: $size(e_i) < size((e_i \diamond e_d))$ y $size(e_d) < size((e_i \diamond e_d))$, aplicando la hipótesis de inducción dos veces, tenemos: $[\![e_i]\!] = z_{e_i}$ y $[\![e_d]\!] = z_{e_d}$, de tal manera que $([\![e_i]\!] \diamond [\![e_d]\!]) = (z_{e_i} \diamond z_{e_d}) \in \mathbb{Z}$.

El significado de un término aritmético es único I

Teorema 5

Sea $e \in \mathcal{LTA}$, si $[\![e]\!] = z'$ y $[\![e]\!] = z''$ entonces $z' = z''$.

El significado de un término aritmético es único I

Teorema 5

Sea $e \in \mathcal{LTA}$, si $[\![e]\!] = z'$ y $[\![e]\!] = z''$ entonces $z' = z''$.

Demostración: por inducción sobre el tamaño de e.

El significado de un término aritmético es único I

Teorema 5

Sea $e \in \mathcal{LTA}$, si $[\![e]\!] = z'$ y $[\![e]\!] = z''$ entonces $z' = z''$.

Demostración: por inducción sobre el tamaño de e.

Hipótesis de inducción: Si $size(e) = k$ y $[\![e]\!] = z'$ y $[\![e]\!] = z''$ entonces $z' = z''$.

El significado de un término aritmético es único I

Teorema 5

Sea $e \in \mathcal{LTA}$, si $[\![e]\!] = z'$ y $[\![e]\!] = z''$ entonces $z' = z''$.

Demostración: por inducción sobre el tamaño de e.

Hipótesis de inducción: Si $size(e) = k$ y $[\![e]\!] = z'$ y $[\![e]\!] = z''$ entonces $z' = z''$.

$e = d$: Si $[\![d]\!] = z'_d$ y $[\![d]\!] = z''_d$ entonces claramente $z'_d = z''_d$.

El significado de un término aritmético es único I

Teorema 5

Sea $e \in \mathcal{LTA}$, si $[\![e]\!] = z'$ y $[\![e]\!] = z''$ entonces $z' = z''$.

Demostración: por inducción sobre el tamaño de e.

Hipótesis de inducción: Si $size(e) = k$ y $[\![e]\!] = z'$ y $[\![e]\!] = z''$ entonces $z' = z''$.

$e = nd$: $[\![nd]\!] = (([\![n]\!] * 10) + [\![d]\!]) = ((z'_n * 10) + z_d)$ y $[\![nd]\!] = (([\![n]\!] * 10) + [\![d]\!]) = ((z''_n * 10) + z_d)$, por la definición de $size$: $size(n) < size(nd)$, aplicando la hipótesis de inducción tenemos $z'_n = z''_n$, así que $((z'_n * 10) + z_d) = ((z''_n * 10) + z_d)$.

El significado de un término aritmético es único II

Demostración: por inducción sobre el tamaño de e.

Hipótesis de inducción: Si $size(e) = k$ y $[\![e]\!] = z'$ y $[\![e]\!] = z''$ entonces $z' = z''$.

$e = (e_i \diamond e_d)$: Donde $\diamond \in \{+, -, *\}$. $[\![(e_i \diamond e_d)]\!] = ([\![e_i]\!] \diamond [\![e_d]\!]) = (z'_{e_i} \diamond z'_{e_d})$ y $[\![(e_i \diamond e_d)]\!] = ([\![e_i]\!] \diamond [\![e_d]\!]) = (z''_{e_i} \diamond z''_{e_d})$, por la definición de $size$: $size(e_i) < size((e_i \diamond e_d))$ y $size(e_d) < size((e_i \diamond e_d))$, aplicando la hipótesis de inducción dos veces tenemos $z'_{e_i} = z''_{e_i}$ y $z'_{e_d} = z''_{e_d}$, concluyendo que $(z'_{e_i} \diamond z'_{e_d}) = (z''_{e_i} \diamond z''_{e_d})$.

Ejercicios

1. Implemente en ML las funciones $size, depth$ y $immsubt$ (utilice los tipos de datos que previamente hemos definido para implementar $\mathcal{LTA}$).
2. Pruebe sus funciones con las siguientes expresiones (traduzca primero cada expresión a un elemento del tipo `exar`):
   1. $(23 + 50), (28 * 15)$.
   2. $(9 - (5 * 2)), (23 * (8 + 2))$.
3. Demuestre por inducción sobre $depth$ e inducción estructural los Teoremas 4 y 5.