Grafos III

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Estructuras Discretas CCOS 009

Primavera 2021

Contenido

Motivación

- Hay muchas formas útiles de representar grafos.

Motivación

- Como veremos a lo largo de este capítulo, al trabajar con un grafo es útil poder elegir su representación más conveniente.

Motivación

- En esta sección mostraremos cómo representar grafos de varias formas diferentes.

Motivación

- A veces, dos grafos tienen exactamente la misma forma, en el sentido de que existe una correspondencia uno a uno entre sus conjuntos de vértices que preservan las aristas.

Motivación

- En tal caso, decimos que los dos grafos son isomorfos.

Motivación

- Determinar si dos grafos son isomorfos es un problema importante de la teoría de grafos que estudiaremos en esta sección.

Listas de adyacencias

- Una forma de representar un grafo sin múltiples aristas es enumerar todas las aristas de este grafo.

- Otra forma de representar un grafo sin múltiples aristas es utilizar listas de adyacencias, que especifican los vértices adyacentes a cada vértice del grafo.

Ejemplo 1

Utilice listas de adyacencias para describir el grafo simple que se muestra en la Figura 1.

Ejemplo 1

Utilice listas de adyacencias para describir el grafo simple que se muestra en la Figura 1.

Solución:

- La Tabla 1 lista los vértices adyacentes a cada uno de los vértices del grafo.

Ejemplo 1 II

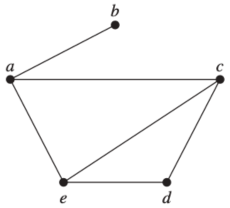


Figura 1: Grafo simple para el Ejemplo 1.

Vertex	*Adjacent Vertices*
a	b, c, e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	a, c, d

Tabla 1: Lista de adyacencia para el grafo de la Figura 1.

Ejemplo 2

Represente el grafo dirigido que se muestra en la Figura 2 listando todos los vértices que son los vértices terminales de las aristas que comienzan en cada vértice del grafo.

Ejemplo 2 I

Ejemplo 2

Represente el grafo dirigido que se muestra en la Figura 2 listando todos los vértices que son los vértices terminales de las aristas que comienzan en cada vértice del grafo.

Solución:

- La Tabla 2 representa el grafo dirigido que se muestra en la Figura 2.

Ejemplo 2 II

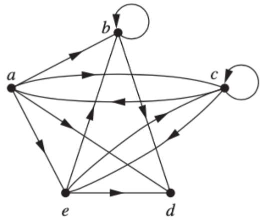


Figura 2: Grafo dirigido para el Ejemplo 2.

Initial Vertex	*Terminal Vertices*
a	b, c, d, e
b	b, d
c	a, c, e
d	
e	b, c, d

Tabla 2: Lista de adyacencias para el grafo de la Figura 2.

Matrices de Adyacencias I

- La realización de algoritmos para grafos utilizando la representación de grafos mediante listas de aristas o listas de adyacencias puede resultar engorrosa si hay muchas aristas en el grafo.

Matrices de Adyacencias I

- Para simplificar el cálculo, los grafos se pueden representar mediante matrices.

Matrices de Adyacencias I

- Aquí se presentarán dos tipos de matrices comúnmente utilizadas para representar grafos.

- Uno se basa en la adyacencia de vértices y el otro se basa en la incidencia de vértices y aristas.

Matrices de Adyacencias II

- Suponga que $G = (V, E)$ es un grafo simple donde $|V| = n$.

Matrices de Adyacencias II

- Suponga que $G = (V, E)$ es un grafo simple donde $|V| = n$.
- Suponga que los vértices de G se enumeran arbitrariamente como $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Matrices de Adyacencias II

- Suponga que $G = (V, E)$ es un grafo simple donde $|V| = n$.
- Suponga que los vértices de G se enumeran arbitrariamente como $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
- La **matriz de adyacencias** $\boldsymbol{A}$ (o $\boldsymbol{A}_G$) de G, con respecto a esta lista de vértices, es la matriz $n \times n$ de ceros y unos con 1 como su (i, j)-ésima entrada cuando v_i y v_j son adyacentes, y 0 como su (i, j)-ésima entrada cuando no son adyacentes.

Matrices de Adyacencias II

- Suponga que $G = (V, E)$ es un grafo simple donde $|V| = n$.
- Suponga que los vértices de G se enumeran arbitrariamente como $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
- La **matriz de adyacencias** $\boldsymbol{A}$ (o $\boldsymbol{A}_G$) de G, con respecto a esta lista de vértices, es la matriz $n \times n$ de ceros y unos con 1 como su (i, j)-ésima entrada cuando v_i y v_j son adyacentes, y 0 como su (i, j)-ésima entrada cuando no son adyacentes.
- En otras palabras, si su matriz de adyacencias es $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$, entonces

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \text{ es una arista de } G, \\ 0 & \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 3 I

Ejemplo 3

Utilice una matriz de adyacencias para representar el grafo que se muestra en la Figura 3.

Ejemplo 3 I

Ejemplo 3

Utilice una matriz de adyacencias para representar el grafo que se muestra en la Figura 3.

Solución:

- Ordenamos los vértices como a, b, c, d.

Ejemplo 3 II

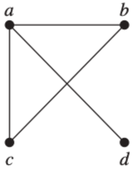


Figura 3: Grafo simple para el Ejemplo 3.

La matriz que representa este grafo es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4

Dibuje una grafo a partir de la matriz de adyacencias

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con respecto al orden de los vértices a, b, c, d.

Solución:

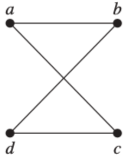


Figura 4: Un grafo para la matriz de adyacencias dada en el Ejemplo 4.

Matrices de Adyacencias III

- Tenga en cuenta que una matriz de adyacencias de un grafo se basa en el orden elegido para los vértices.

Matrices de Adyacencias III

- Por lo tanto, puede haber tantos como $n!$ diferentes matrices de adyacencia para un grafo con n vértices, porque hay $n!$ diferentes ordenamientos de n vértices.

Matrices de Adyacencias III

- La matriz de adyacencias de un grafo simple es simétrica, es decir, $a_{ij} = a_{ji}$, porque ambas entradas son 1 cuando v_i y v_j son adyacentes, y ambas son 0 en caso contrario.

- Además, debido a que un grafo simple no tiene ciclos, cada entrada $a_{ii}, i = 1, 2, 3, \ldots, n$, es 0.

Matrices de Adyacencias IV

- Las matrices de adyacencia también se pueden utilizar para representar grafos no dirigidos con ciclos y con múltiples aristas.

Matrices de Adyacencias IV

- Un ciclo en el vértice v_i está representado por un 1 en la posición (i, i)-ésima de la matriz de adyacencias.

Matrices de Adyacencias IV

- Cuando existen múltiples aristas que conectan el mismo par de vértices v_i y v_j, o múltiples ciclos en el mismo vértice, la matriz de adyacencias ya no es una matriz cero-uno, porque la entrada (i, j)-ésima de esta matriz es igual al número de aristas asociadas a $\{v_i, v_j\}$.

Matrices de Adyacencias IV

- Todos los grafos no dirigidos, incluidos los multigrafos y los pseudógrafos, tienen matrices de adyacencia simétricas.

Ejemplo 5

Ejemplo 5

Utilice una matriz de adyacencias para representar el pseudógrafo que se muestra en la Figura 5, con respecto al orden de los vértices a, b, c, d.

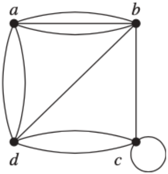


Figura 5: Un pseudografo para el Ejemplo 5.

Solución:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices de Incidencias I

- Otra forma común de representar grafos es utilizando matrices de incidencias.

Matrices de Incidencias I

- Otra forma común de representar grafos es utilizando matrices de incidencias.
- Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido.

- Otra forma común de representar grafos es utilizando matrices de incidencias.
- Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido.
- Suponga que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son los vértices y $e_1, e_2, \ldots, e_m$ son las aristas de G.

- Otra forma común de representar grafos es utilizando matrices de incidencias.
- Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido.
- Suponga que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son los vértices y $e_1, e_2, \ldots, e_m$ son las aristas de G.
- Entonces la matriz de incidencias con respecto a este orden de V y E es la matriz de $n \times m$ $\boldsymbol{M} = [m_{ij}]$, donde

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{cuando la arista } e_j \text{ es incidente con } v_i, \\ 0 & \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 6

Represente el grafo que se muestra en la Figura 6 con una matriz de incidencias.

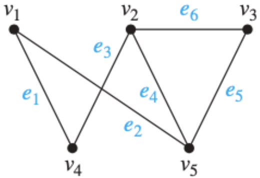
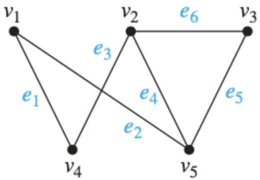


Figura 6: El grafo no dirigido para el Ejemplo 6.

Ejemplo 6 II



Solución: La matriz de incidencias es

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

□

Matrices de Incidencias II

- Las matrices de incidencia también se pueden utilizar para representar aristas múltiples y ciclos.

- Las aristas múltiples se representan en la matriz de incidencias utilizando columnas con entradas idénticas, porque estas aristas inciden con el mismo par de vértices.

- Los ciclos se representan mediante una columna con exactamente una entrada igual a 1, correspondiente al vértice que incide en este ciclo.

Ejemplo 7

Represente el pseudografo que se muestra en la Figura 7 utilizando una matriz de incidencias.

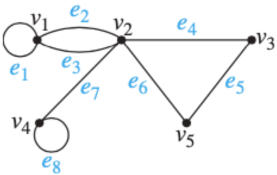
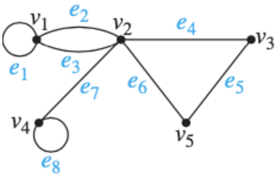


Figura 7: El pseudografo para el Ejemplo 7.

Ejemplo 7 II



Solución: La matriz de incidencias de este pseudografo es

$$
\begin{array}{c}
 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

Isomorfismo de Grafos I

- A menudo necesitamos saber si es posible dibujar dos grafos de la misma manera.

Isomorfismo de Grafos I

- Es decir, ¿los grafos tienen la misma estructura cuando ignoramos las identidades de sus vértices?

- Por ejemplo, en química, los gráficos se utilizan para modelar compuestos químicos (de una manera que describiremos más adelante).

Isomorfismo de Grafos I

- Diferentes compuestos pueden tener la misma fórmula molecular pero pueden diferir en estructura.

- Dichos compuestos se pueden representar mediante grafos que no se pueden dibujar de la misma manera.

Isomorfismo de Grafos I

- Los grafos que representan compuestos previamente conocidos pueden usarse para determinar si un compuesto supuestamente nuevo se ha estudiado antes.

Isomorfismo de Grafos I

- Existe una terminología útil para grafos con la misma estructura.

Definición 1

Los grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son *isomorfos* si existe una función uno a uno y sobre f de V_1 a V_2 con la propiedad de que a y b son adyacentes en G_1 si y sólo si $f(a)$ y $f(b)$ son adyacentes en G_2, para todo a y b en V_1. Esta función f se llama *isomorfismo*[a]. Dos grafos simples que no son isomorfos se denominan *no isomorfos*.

[a] La palabra *isomorfismo* proviene de las raíces griegas *isos* para "igual" y *morphe* para "forma".

Ejemplo 8 I

Ejemplo 8

Muestre que los grafos $G = (V, E)$ y $H = (W, F)$, que se muestran en la Figura 8, son isomorfos.

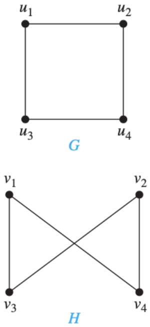


Figura 8: Los grafos G y H para el Ejemplo 8.

Ejemplo 8 II

Solución:

- La función f con $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_4$, $f(u_3) = v_3$, y $f(u_4) = v_2$ es una correspondencia uno a uno entre V y W.

Ejemplo 8 II

Solución:

- La función f con $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_4$, $f(u_3) = v_3$, y $f(u_4) = v_2$ es una correspondencia uno a uno entre V y W.
- Para ver que esta correspondencia conserva la adyacencia, observe que los vértices adyacentes en G son u_1 y u_2, u_1 y u_3, u_2 y u_4, y u_3 y u_4,

Ejemplo 8 II

Solución:

- La función f con $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_4$, $f(u_3) = v_3$, y $f(u_4) = v_2$ es una correspondencia uno a uno entre V y W.
- Para ver que esta correspondencia conserva la adyacencia, observe que los vértices adyacentes en G son u_1 y u_2, u_1 y u_3, u_2 y u_4, y u_3 y u_4,
- y cada uno de los pares $f(u_1) = v_1$ y $f(u_2) = v_4$, $f(u_1) = v_1$ y $f(u_3) = v_3$, $f(u_2) = v_4$ y $f(u_4) = v_2$, y $f(u_3) = v_3$ y $f(u_4) = v_2$ consta de dos vértices adyacentes en H.

Determinando si dos grafos simples son isomorfos I

- A menudo es difícil determinar si dos grafos simples son isomorfos.

Determinando si dos grafos simples son isomorfos I

- Hay $n!$ posibles correspondencias uno a uno entre los conjuntos de vértices de dos grafos simples con n vértices.

Determinando si dos grafos simples son isomorfos I

- Probar cada una de estas correspondencias para ver si conserva la adyacencia y la no adyacencia no es práctico si n es grande.

Determinando si dos grafos simples son isomorfos I

- A veces no es difícil demostrar que dos grafos no son isomorfos.

Determinando si dos grafos simples son isomorfos I

- En particular, podemos mostrar que dos grafos no son isomorfos si podemos encontrar una propiedad que sólo uno de los dos grafos tiene, pero que se conserva mediante isomorfismo.

Determinando si dos grafos simples son isomorfos I

- Una propiedad preservada por el isomorfismo de los grafos se denomina **invariante de grafos**.

Determinando si dos grafos simples son isomorfos II

- Por ejemplo, los grafos simples isomorfos deben tener el mismo número de vértices, porque existe una correspondencia uno a uno entre los conjuntos de vértices de los grafos.

Determinando si dos grafos simples son isomorfos II

- Los grafos simples isomorfos también deben tener el mismo número de aristas, porque la correspondencia uno a uno entre vértices establece una correspondencia uno a uno entre aristas.

Determinando si dos grafos simples son isomorfos II

- Además, los grados de los vértices en grafos simples isomorfos deben ser los mismos.

Determinando si dos grafos simples son isomorfos II

- Es decir, un vértice v de grado d en G debe corresponder a un vértice $f(v)$ de grado d en H, porque un vértice w en G es adyacente a v si y sólo si $f(v)$ y $f(w)$ son adyacente en H.

Ejemplo 9

Muestre que los grafos que se muestran en la Figura 9 no son isomorfos.

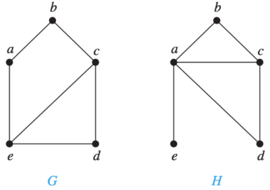


Figura 9: Los grafos G y H para el Ejemplo 9.

Ejemplo 9

Ejemplo 9

Muestre que los grafos que se muestran en la Figura 9 no son isomorfos.

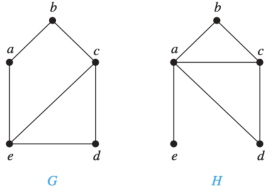


Figura 9: Los grafos G y H para el Ejemplo 9.

Solución:

- Tanto G como H tienen cinco vértices y seis aristas.

Ejemplo 9

Ejemplo 9

Muestre que los grafos que se muestran en la Figura 9 no son isomorfos.

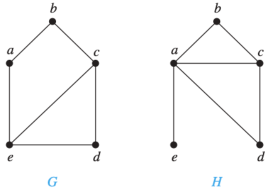


Figura 9: Los grafos G y H para el Ejemplo 9.

Solución:

- Sin embargo, H tiene un vértice de grado uno, es decir, el vértice e, mientras que G no tiene vértices de grado uno.

Ejemplo 9

Muestre que los grafos que se muestran en la Figura 9 no son isomorfos.

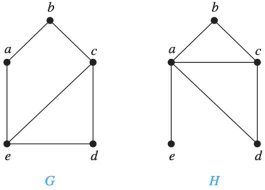


Figura 9: Los grafos G y H para el Ejemplo 9.

Solución:

- De ello se deduce que G y H no son isomorfos.

- El número de vértices, el número de aristas y el número de vértices de cada grado son todos invariantes bajo isomorfismo.

Determinando si dos grafos simples son isomorfos III

- Si alguna de estas cantidades difiere en dos grafos simples, estos grafos no pueden ser isomorfos.

Determinando si dos grafos simples son isomorfos III

- Sin embargo, cuando estas invariantes son iguales, no significa necesariamente que los dos grafos sean isomorfos.

Determinando si dos grafos simples son isomorfos III

- Actualmente no se conocen conjuntos útiles de invariantes que puedan usarse para determinar si los grafos simples son isomorfos.

Ejemplo 10 I

Ejemplo 10

Determine si los grafos que se muestran en la Figura 10 son isomorfos.

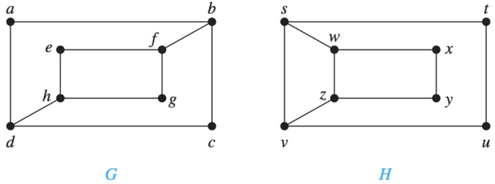


Figura 10: Los grafos G y H para el Ejemplo 10.

Ejemplo 10 I

Ejemplo 10

Determine si los grafos que se muestran en la Figura 10 son isomorfos.

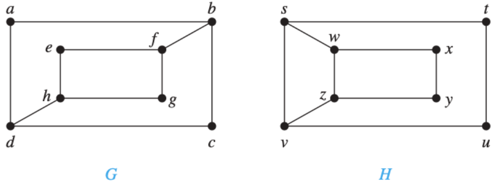


Figura 10: Los grafos G y H para el Ejemplo 10.

Solución:

- Los grafos G y H tienen ocho vértices y 10 aristas.

Ejemplo 10

Determine si los grafos que se muestran en la Figura 10 son isomorfos.

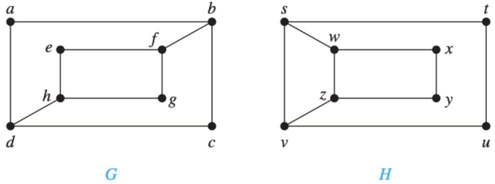


Figura 10: Los grafos G y H para el Ejemplo 10.

Solución:

- Ambos también tienen cuatro vértices de grado dos y cuatro de grado tres.

Ejemplo 10 I

Ejemplo 10

Determine si los grafos que se muestran en la Figura 10 son isomorfos.

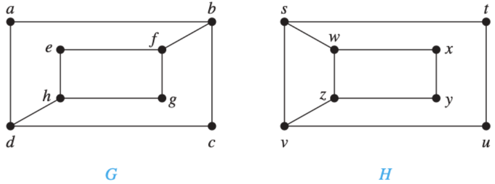
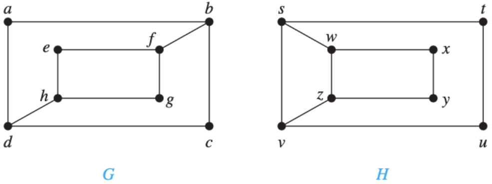


Figura 10: Los grafos G y H para el Ejemplo 10.

Solución:

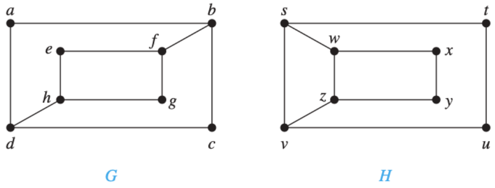
- Debido a que todas estas invariantes concuerdan, todavía es concebible que estos grafos sean isomorfos.

Ejemplo 10 II

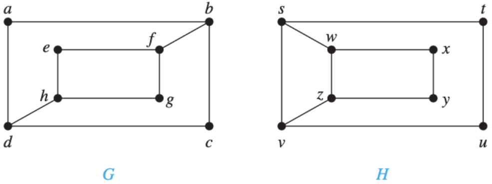


- Sin embargo, G y H no son isomorfos.

Ejemplo 10 II



- Sin embargo, G y H no son isomorfos.
- Para ver esto, tenga en cuenta que debido a que el $deg(a) = 2$ en G, a debe corresponder a t, u, x o y en H, porque estos son los vértices del grado dos en H.



- Sin embargo, G y H no son isomorfos.
- Para ver esto, tenga en cuenta que debido a que el $deg(a) = 2$ en G, a debe corresponder a t, u, x o y en H, porque estos son los vértices del grado dos en H.
- Sin embargo, cada uno de estos cuatro vértices en H es adyacente a otro vértice de grado dos en H, lo que no es cierto para a en G.

Ejemplo 10 III

- Otra forma de ver que G y H no son isomorfos es notar que los subgrafos de G y H formados por vértices de grado tres y las aristas que los conectan deben ser isomorfos si estos dos grafos son isomorfos.

Ejemplo 10 III

- Otra forma de ver que G y H no son isomorfos es notar que los subgrafos de G y H formados por vértices de grado tres y las aristas que los conectan deben ser isomorfos si estos dos grafos son isomorfos.

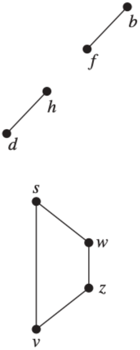


Figura 11: Los subgrafos de G y H formados por vértices de grado tres y las aristas que los conectan, para el Ejemplo 10.

Determinando si dos grafos simples son isomorfos IV

- Para mostrar que una función f del conjunto de vértices de un grafo G al conjunto de vértices de un grafo H es un isomorfismo, debemos demostrar que f conserva la presencia y ausencia de aristas.

Determinando si dos grafos simples son isomorfos IV

- Una forma útil de hacer esto es utilizar matrices de adyacencias.

Determinando si dos grafos simples son isomorfos IV

- En particular, para mostrar que f es un isomorfismo, podemos mostrar que la matriz de adyacencias de G es la misma que la matriz de adyacencias de H, cuando las filas y columnas están etiquetadas para corresponder a las imágenes bajo f de los vértices en G que son las etiquetas de estas filas y columnas en la matriz de adyacencias de G.

Determinando si dos grafos simples son isomorfos IV

- Ilustramos cómo se hace esto en el Ejemplo 11.

Ejemplo 11

Determine si los grafos G y H que se muestran en la Figura 12 son isomorfos.

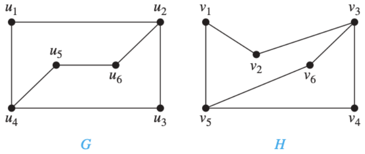


Figura 12: Los grafos G y H para el Ejemplo 11.

Solución:

- Tanto G como H tienen seis vértices y siete aristas.

Ejemplo 11

Determine si los grafos G y H que se muestran en la Figura 12 son isomorfos.

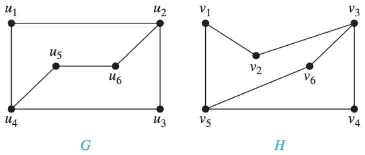


Figura 12: Los grafos G y H para el Ejemplo 11.

Solución:

- Ambos tienen cuatro vértices de grado dos y dos vértices de grado tres.

Ejemplo 11

Determine si los grafos G y H que se muestran en la Figura 12 son isomorfos.

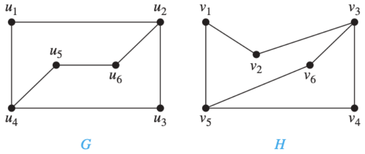


Figura 12: Los grafos G y H para el Ejemplo 11.

Solución:

- También es fácil ver que los subgrafos de G y H que consisten en todos los vértices de grado dos y las aristas que los conectan son isomorfos.

Ejemplo 11

Determine si los grafos G y H que se muestran en la Figura 12 son isomorfos.

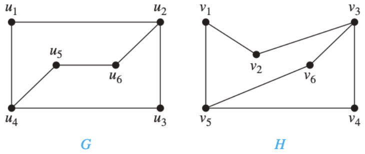
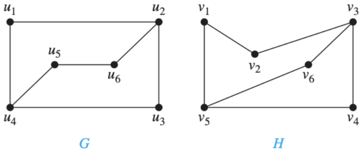


Figura 12: Los grafos G y H para el Ejemplo 11.

Solución:

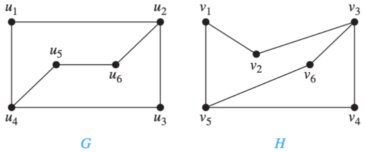
- Dado que G y H concuerdan con respecto a estos invariantes, es razonable intentar encontrar un isomorfismo f.

Ejemplo 11 II



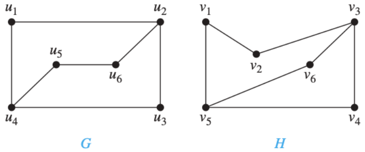
- Ahora definiremos una función f y luego determinaremos si es un isomorfismo.

Ejemplo 11 II

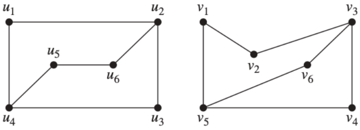


- Debido a que $deg(u_1) = 2$ y debido a que u_1 no es adyacente a ningún otro vértice de grado dos, la imagen de u_1 debe ser v_4 o v_6, los únicos vértices de grado dos en H no adyacentes a un vértice de grado dos.

Ejemplo 11 II



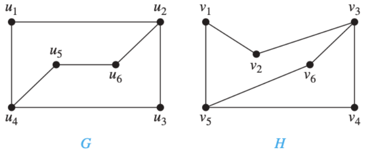
- Establecemos arbitrariamente $f(u_1) = v_6$.



G H

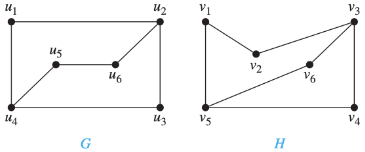
- Si encontráramos que esta elección no condujo al isomorfismo, intentaríamos $f(u_1) = v_4$.

Ejemplo 11 II



- Como u_2 es adyacente a u_1, las posibles imágenes de u_2 son v_3 y v_5.

Ejemplo 11 II



- Establecemos arbitrariamente $f(u_2) = v_3$.

Ejemplo 11 III

- Continuando de esta manera, usando la adyacencia de vértices y grados como guía, establecemos $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_5$, $f(u_5) = v_1$ y $f(u_6) = v_2$.

Ejemplo 11 III

- Continuando de esta manera, usando la adyacencia de vértices y grados como guía, establecemos $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_5$, $f(u_5) = v_1$ y $f(u_6) = v_2$.
- Ahora tenemos una correspondencia uno a uno entre el conjunto de vértices de G y el conjunto de vértices de H, a saber, $f(u_1) = v_6$, $f(u_2) = v_3$, $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_5$, $f(u_5) = v_1$, $f(u_6) = v_2$.

Ejemplo 11 III

- Continuando de esta manera, usando la adyacencia de vértices y grados como guía, establecemos $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_5$, $f(u_5) = v_1$ y $f(u_6) = v_2$.
- Ahora tenemos una correspondencia uno a uno entre el conjunto de vértices de G y el conjunto de vértices de H, a saber, $f(u_1) = v_6$, $f(u_2) = v_3$, $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_5$, $f(u_5) = v_1$, $f(u_6) = v_2$.
- Para ver si f conserva las aristas, examinamos la matriz de adyacencias de G,

$$\boldsymbol{A}_G = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Ejemplo 11 IV

- y la matriz de adyacencias de H con las filas y columnas etiquetadas por las imágenes de los vértices correspondientes en G,

$$\boldsymbol{A}_H = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} v_6 & v_3 & v_4 & v_5 & v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_6 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Ejemplo 11 IV

- y la matriz de adyacencias de H con las filas y columnas etiquetadas por las imágenes de los vértices correspondientes en G,

$$\boldsymbol{A}_H = \begin{array}{c} \\ v_6 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_6 & v_3 & v_4 & v_5 & v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

- Como $\boldsymbol{A}_G = \boldsymbol{A}_H$, se deduce que f conserva las aristas.

Ejemplo 11 IV

- y la matriz de adyacencias de H con las filas y columnas etiquetadas por las imágenes de los vértices correspondientes en G,

$$\boldsymbol{A}_H = \begin{array}{c} \\ v_6 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_6 & v_3 & v_4 & v_5 & v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

- Como $\boldsymbol{A}_G = \boldsymbol{A}_H$, se deduce que f conserva las aristas.
- Concluimos que f es un isomorfismo, por lo que G y H son isomorfos.

Ejemplo 11 IV

- y la matriz de adyacencias de H con las filas y columnas etiquetadas por las imágenes de los vértices correspondientes en G,

$$\boldsymbol{A}_H = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} v_6 & v_3 & v_4 & v_5 & v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_6 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

- Como $\boldsymbol{A}_G = \boldsymbol{A}_H$, se deduce que f conserva las aristas.
- Concluimos que f es un isomorfismo, por lo que G y H son isomorfos.
- Tenga en cuenta que si f no hubiera sido un isomorfismo, no habríamos establecido que G y H no son isomorfos, porque otra correspondencia de los vértices en G y H puede ser un isomorfismo.

$\square$

1. Represente mediante una matriz de adyacencias cada uno de los grafos de la Figura 13.

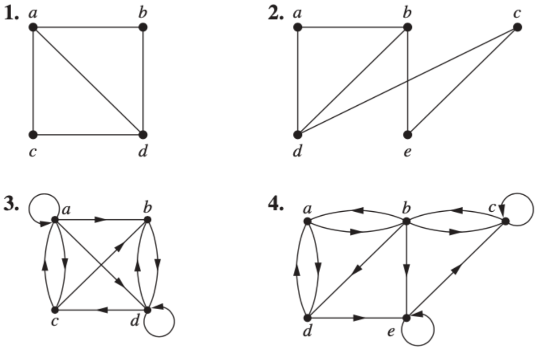


Figura 13: Grafos para el Ejercicio 1.

Ejercicios II

2. Dibuje el grafo correspondiente a cada una de las siguientes matrices de adyacencias.

    1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

    2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

    3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Use una matriz de incidencias para representar cada grafo de la Figura 14.

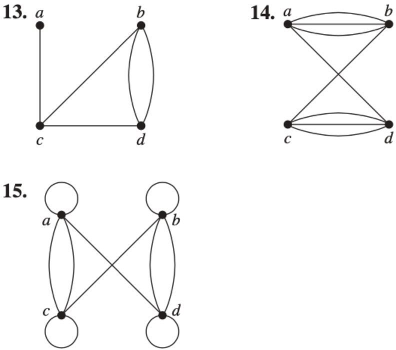


Figura 14: Grafos para el Ejercicio 3.

Ejercicios IV

4. Para cada par de grafos dados en la Figura 15 determine si son isomorfos. Demuestre un isomorfismo o proporcione un argumento riguroso de que no existe isomorfismo.

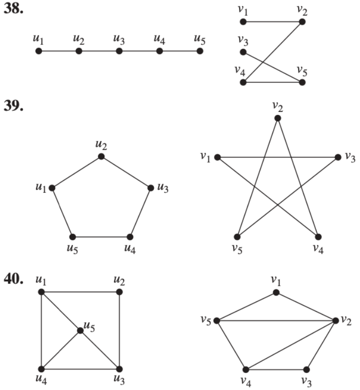


Figura 15: Grafos para el Ejercicio 4.