Grafos II

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Estructuras Discretas CCOS 009

Primavera 2021

Contenido

Motivación

- Presentamos parte del vocabulario básico de la teoría de grafos en esta sección.

Motivación

- Usaremos este vocabulario más adelante en este capítulo cuando resolvamos muchos tipos de problemas diferentes.

Motivación

- Uno de esos problemas implica determinar si un grafo se puede dibujar en el plano de modo que no se crucen dos de sus aristas.

Motivación

- Otro ejemplo es decidir si hay una correspondencia uno a uno entre los vértices de dos grafos que produce una correspondencia uno a uno entre las aristas de los grafos.

Motivación

- También presentaremos varias familias importantes de grafos que se utilizan a menudo como ejemplos y en modelos.

Motivación

- Se describirán varias aplicaciones importantes donde surgen estos tipos especiales de grafos.

Terminología Básica I

Definición 1

Dos vértices u y v en un grafo no dirigido G se llaman *adyacentes* (o *vecinos*) en G si u y v son puntos extremos de una arista e de G. Dicha arista e se llama *incidente* con los vértices u y v, también se dice que e *conecta* a u y v.

Terminología Básica I

Definición 2

El conjunto de todos los vecinos de un vértice v de $G = (V, E)$, denotado por $N(v)$, se llama la *vecindad* de v. Si A es un subconjunto de V, denotamos por $N(A)$ el conjunto de todos los vértices en G que son adyacentes a al menos un vértice en A. Así, $N(A) = \bigcup_{v \in A} N(v)$.

Definición 3

El *grado de un vértice en un grafo no dirigido* es el número de aristas incidentes con él, excepto que un ciclo en un vértice contribuye dos veces al grado de ese vértice. El grado del vértice v se denota mediante $deg(v)$.

Ejemplo 1

¿Cuáles son los grados y las vecindades de los vértices en los grafos G y H que se muestran en la Figura 1?

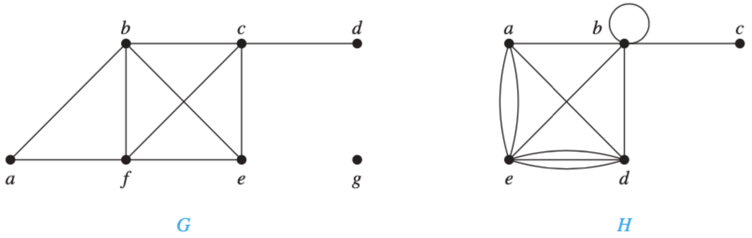


Figura 1: Los grafos no dirigidos G y H.

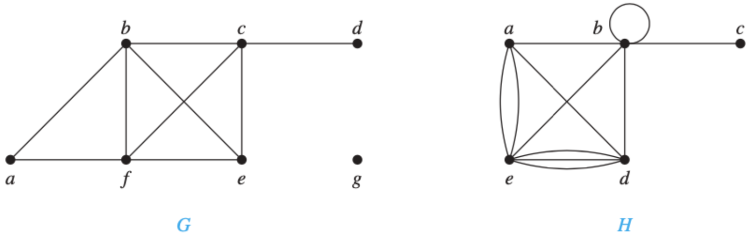


Figura 1: Los grafos no dirigidos G y H.

Solución: En G, $deg(a) = 2$, $deg(b) = deg(c) = deg(f) = 4$, $deg(d) = 1$, $deg(e) = 3$ y $deg(g) = 0$. Las vecindades de estos vértices son $N(a) = \{b, f\}$, $N(b) = \{a, c, e, f\}$, $N(c) = \{b, d, e, f\}$, $N(d) = \{c\}$, $N(e) = \{b, c, f\}$, $N(f) = \{a, b, c, e\}$ y $N(g) = \emptyset$. En H, $deg(a) = 4$, $deg(b) = deg(e) = 6$, $deg(c) = 1$ y $deg(d) = 5$. Las vecindades de estos vértices son $N(a) = \{b, d, e\}$, $N(b) = \{a, b, c, d, e\}$, $N(c) = \{b\}$, $N(d) = \{a, b, e\}$ y $N(e) = \{a, b, d\}$. $\square$

Terminología Básica IV

- Un vértice de grado cero se llama **aislado**.

Terminología Básica IV

- De ello se deduce que un vértice aislado no es adyacente a ningún vértice.

Terminología Básica IV

- El vértice g del grafo G del Ejemplo 1 está aislado.

Terminología Básica IV

- Un vértice es **colgante** si y sólo si tiene grado uno.

Terminología Básica IV

- En consecuencia, un vértice colgante es adyacente exactamente a otro vértice.

- El vértice d del grafo G del Ejemplo 1 es colgante.

Terminología Básica IV

- Examinar los grados de los vértices en un modelo de grafo puede proporcionar información útil sobre el modelo, como muestra el Ejemplo 2.

Ejemplo 2

¿Qué representa el grado de un vértice en un grafo de superposición de nichos (presentado en el Ejemplo 5.1.11 en la Sección 5.1)? ¿Qué vértices de este grafo son colgantes y cuáles están aislados? Utilice el grafo de superposición de nichos que se muestra en la Figura 2 de la Sección 5.1) para interpretar sus respuestas.

Solución:

- Hay una arista entre dos vértices en un grafo de superposición de nichos si y sólo si las dos especies representadas por estos vértices compiten.

Ejemplo 2

¿Qué representa el grado de un vértice en un grafo de superposición de nichos (presentado en el Ejemplo 5.1.11 en la Sección 5.1)? ¿Qué vértices de este grafo son colgantes y cuáles están aislados? Utilice el grafo de superposición de nichos que se muestra en la Figura 2 de la Sección 5.1) para interpretar sus respuestas.

Solución:

- Por lo tanto, el grado de un vértice en un grafo de superposición de nichos es el número de especies en el ecosistema que compiten con las especies representadas por este vértice.

Ejemplo 2

¿Qué representa el grado de un vértice en un grafo de superposición de nichos (presentado en el Ejemplo 5.1.11 en la Sección 5.1)? ¿Qué vértices de este grafo son colgantes y cuáles están aislados? Utilice el grafo de superposición de nichos que se muestra en la Figura 2 de la Sección 5.1) para interpretar sus respuestas.

Solución:

- Un vértice es colgante si la especie compite exactamente con otra especie en el ecosistema.

Ejemplo 2

¿Qué representa el grado de un vértice en un grafo de superposición de nichos (presentado en el Ejemplo 5.1.11 en la Sección 5.1)? ¿Qué vértices de este grafo son colgantes y cuáles están aislados? Utilice el grafo de superposición de nichos que se muestra en la Figura 2 de la Sección 5.1) para interpretar sus respuestas.

Solución:

- Finalmente, el vértice que representa una especie se aísla si esta especie no compite con ninguna otra especie del ecosistema.

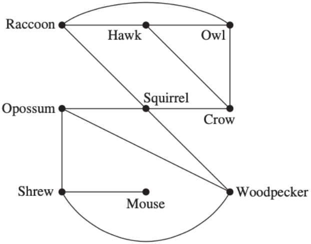


Figura 2: Un grafo de superposición de nichos.

- Por ejemplo, el grado del vértice que representa a la ardilla en el grafo de superposición de nichos en la Figura 2 es cuatro, porque la ardilla compite con otras cuatro especies: el cuervo, la zarigüeya, el mapache y el pájaro carpintero.

Ejemplo 2 II

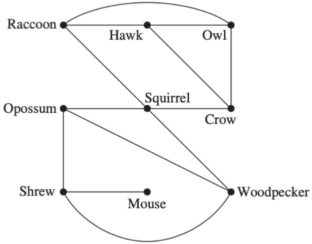


Figura 2: Un grafo de superposición de nichos.

- En este grafo de superposición de nichos, el ratón es la única especie representada por un vértice colgante, porque el ratón compite sólo con la musaraña y todas las demás especies compiten con al menos otras dos especies.

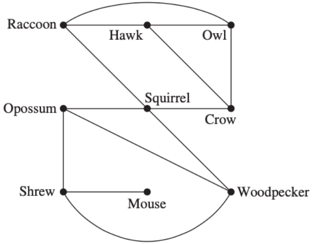


Figura 2: Un grafo de superposición de nichos.

- No hay vértices aislados en este grafo de superposición de nichos porque cada especie en este ecosistema compite con al menos otra especie.

El teorema del apretón de manos I

- ¿Qué obtenemos cuando sumamos los grados de todos los vértices de una grafo $G = (V, E)$?

El teorema del apretón de manos I

- Cada arista contribuye con dos a la suma de los grados de los vértices porque una arista incide exactamente con dos vértices (posiblemente iguales).

El teorema del apretón de manos I

- Esto significa que la suma de los grados de los vértices es el doble del número de aristas.

- Tenemos el resultado en el Teorema 1, que a veces se denomina teorema del apretón de manos (y también se conoce a menudo como el lema del apretón de manos), debido a la analogía entre una arista que tiene dos extremos y un apretón de manos que involucra dos manos.

El teorema del apretón de manos II

Teorema 1

EL TEOREMA DEL APRETÓN DE MANOS Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigida con m aristas. Entonces

$$2m = \sum_{v \in V} deg(v).$$

(Tenga en cuenta que esto se cumple incluso si están presentes múltiples aristas y ciclos).

■

Ejemplo 3

Ejemplo 3

¿Cuántas aristas hay en un grafo con 10 vértices cada uno de grado seis?

Ejemplo 3

¿Cuántas aristas hay en un grafo con 10 vértices cada uno de grado seis?

Solución:

- Debido a que la suma de los grados de los vértices es $6 \cdot 10 = 60$, se deduce que $2m = 60$ donde m es el número de aristas.

Ejemplo 3

¿Cuántas aristas hay en un grafo con 10 vértices cada uno de grado seis?

Solución:

- Debido a que la suma de los grados de los vértices es $6 \cdot 10 = 60$, se deduce que $2m = 60$ donde m es el número de aristas.
- Por lo tanto, $m = 30$.

$\square$

Teorema 2 I

- El teorema 1 muestra que la suma de los grados de los vértices de una grafo no dirigido es par.

Teorema 2 I

- Este simple hecho tiene muchas consecuencias, una de las cuales se da en el Teorema 2.

Teorema 2

Un grafo no dirigido tiene un número par de vértices de grado impar.

Teorema 2

Un grafo no dirigido tiene un número par de vértices de grado impar.

Demostración:

- Sean V_1 y V_2 el conjunto de vértices de grado par y el conjunto de vértices de grado impar, respectivamente, en un grafo no dirigido $G = (V, E)$ con m aristas.

$$2m = \sum_{v \in V} deg(v) = \sum_{v \in V_1} deg(v) + \sum_{v \in V_2} deg(v).$$

Demostración:

- Sean V_1 y V_2 el conjunto de vértices de grado par y el conjunto de vértices de grado impar, respectivamente, en un grafo no dirigido $G = (V, E)$ con m aristas.

$$2m = \sum_{v \in V} deg(v) = \sum_{v \in V_1} deg(v) + \sum_{v \in V_2} deg(v).$$

- Debido a que $deg(v)$ es par para $v \in V_1$, el primer término en el lado derecho de la última igualdad es par.

Teorema 2 II

$$2m = \sum_{v \in V} deg(v) = \sum_{v \in V_1} deg(v) + \sum_{v \in V_2} deg(v).$$

- Además, la suma de los dos términos en el lado derecho de la última igualdad es par, porque esta suma es $2m$.

Teorema 2 II

$$2m = \sum_{v \in V} deg(v) = \sum_{v \in V_1} deg(v) + \sum_{v \in V_2} deg(v).$$

- Además, la suma de los dos términos en el lado derecho de la última igualdad es par, porque esta suma es $2m$.
- Por tanto, el segundo término de la suma también es par.

Teorema 2 II

$$2m = \sum_{v \in V} deg(v) = \sum_{v \in V_1} deg(v) + \sum_{v \in V_2} deg(v).$$

- Además, la suma de los dos términos en el lado derecho de la última igualdad es par, porque esta suma es $2m$.
- Por tanto, el segundo término de la suma también es par.
- Debido a que todos los términos de esta suma son impares, debe haber un número par de dichos términos.

Teorema 2 II

$$2m = \sum_{v \in V} deg(v) = \sum_{v \in V_1} deg(v) + \sum_{v \in V_2} deg(v).$$

- Además, la suma de los dos términos en el lado derecho de la última igualdad es par, porque esta suma es $2m$.
- Por tanto, el segundo término de la suma también es par.
- Debido a que todos los términos de esta suma son impares, debe haber un número par de dichos términos.
- Por tanto, hay un número par de vértices de grado impar.

$\blacksquare$

Terminología Grafos Dirigidos I

Definición 4

Cuando (u, v) es una arista del grafo G con aristas dirigidas, se dice que u es *adyacente hacia* v y que v es *adyacente desde* u. El vértice u se llama *vértice inicial* de (u, v) y v se llama *vértice terminal* o *final* de (u, v). El vértice inicial y el vértice terminal de un ciclo son iguales.

Terminología Grafos Dirigidos I

Debido a que las aristas en grafos con aristas dirigidas son pares ordenados, la definición del grado de un vértice se puede refinar para reflejar el número de aristas con este vértice como vértice inicial y como vértice terminal.

Definición 5

En un grafo con aristas dirigidas, el *grado de entrada de un vértice* v, denotado por $deg^{-}(v)$, es el número de aristas con v como su vértice terminal. El *grado de salida de* v, denotado por $deg^{+}(v)$, es el número de aristas con v como su vértice inicial. (Tenga en cuenta que un ciclo en un vértice aporta 1 tanto al grado de entrada como al de salida de este vértice).

Ejemplo 4

Encuentre el grado de entrada y salida de cada vértice en el grafo G con las aristas dirigidas que se muestran en la Figura 3.

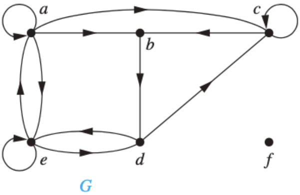


Figura 3: El grafo dirigido G para el ejemplo 4.

Ejemplo 4

Encuentre el grado de entrada y salida de cada vértice en el grafo G con las aristas dirigidas que se muestran en la Figura 3.

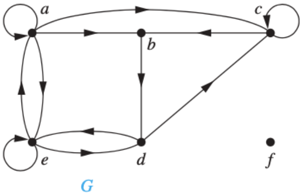


Figura 3: El grafo dirigido G para el ejemplo 4.

Solución:

- Los grados de entrada en G son $deg^-(a) = 2$, $deg^-(b) = 2$, $deg^-(c) = 3$, $deg^-(d) = 2$, $deg^-(e) = 3$, y $deg^-(f) = 0$. Los grados de salida son $deg^+(a) = 4$, $deg^+(b) = 1$, $deg^+(c) = 2$, $deg^+(d) = 2$, $deg^+(e) = 3$ y $deg^+(f) = 0$.

Teorema 3

- Debido a que cada arista tiene un vértice inicial y un vértice terminal, la suma de los grados de entrada y la suma de los grados de salida de todos los vértices en un grafo con aristas dirigidas es la misma.

Teorema 3

- Ambas sumas son el número de aristas en el grafo.

Teorema 3

- Este resultado se expresa como el Teorema 3.

Teorema 3

Sea $G = (V, E)$ un grafo con aristas dirigidas. Entonces

$$\sum_{v \in V} deg^{-}(v) = \sum_{v \in V} deg^{+}(v) = |V|.$$

■

Terminología Grafos Dirigidos III

- Hay muchas propiedades de un grafo con aristas dirigidas que no dependen de la dirección de sus aristas.

Terminología Grafos Dirigidos III

- En consecuencia, a menudo es útil ignorar estas direcciones.

Terminología Grafos Dirigidos III

- El grafo no dirigido que resulta de ignorar las direcciones de las aristas se denomina **grafo no dirigido subyacente**.

Terminología Grafos Dirigidos III

- Un grafo con aristas dirigidas y su grafo subyacente no dirigido tienen el mismo número de aristas.

Ejemplo 5

Grafos completos

Ejemplo 5

Grafos completos

- Un **grafo completo sobre n vértices**, denotado por K_n, es un grafo simple que contiene exactamente una arista entre cada par de vértices distintos.

Ejemplo 5

Grafos completos

- Un **grafo completo sobre n vértices**, denotado por K_n, es un grafo simple que contiene exactamente una arista entre cada par de vértices distintos.
- Los grafos K_n, para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, se muestran en la Figura 4.

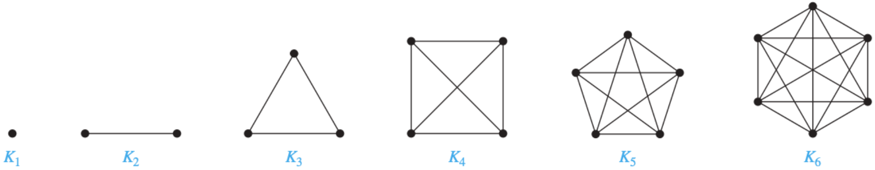


Figura 4: Los grafos K_n para $1 \leq n \leq 6$.

Ejemplo 5

Grafos completos

- Un **grafo completo sobre n vértices**, denotado por K_n, es un grafo simple que contiene exactamente una arista entre cada par de vértices distintos.
- Los grafos K_n, para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, se muestran en la Figura 4.
- Un grafo simple para el cual hay al menos un par de vértices distintos no conectados por una arista se llama **no completo**.

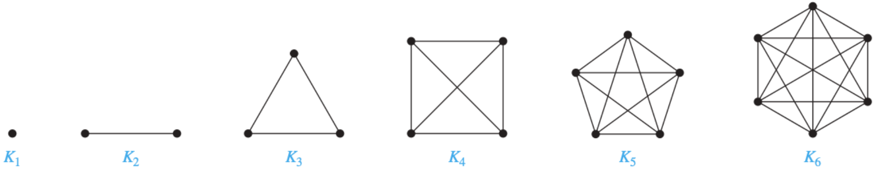


Figura 4: Los grafos K_n para $1 \leq n \leq 6$.

Ejemplo 6

Ciclos

Ejemplo 6

Ciclos

- Un **ciclo** $C_n, n \geq 3$, consta de n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y aristas $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}, \ldots$, $\{v_{n-1}, v_n\}$ y $\{v_n, v_1\}$.

Ejemplo 6

Ciclos

- Un **ciclo** $C_n, n \geq 3$, consta de n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y aristas $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, ..., $\{v_{n-1}, v_n\}$ y $\{v_n, v_1\}$.
- Los ciclos C_3, C_4, C_5 y C_6 se muestran en la Figura 5.

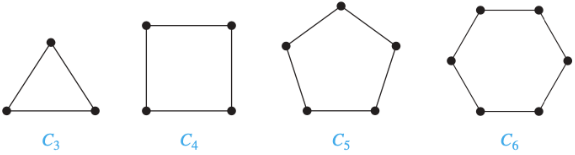


Figura 5: Los ciclos C_3, C_4, C_5 y C_6.

Ejemplo 7

Ruedas

Ejemplo 7

Ruedas

- Obtenemos una **rueda** W_n cuando añadimos un vértice adicional a un ciclo C_n, para $n \geq 3$, y conectamos este nuevo vértice a cada uno de los n vértices de C_n, por nuevas aristas.

Ejemplo 7

Ruedas

- Obtenemos una **rueda** W_n cuando añadimos un vértice adicional a un ciclo C_n, para $n \geq 3$, y conectamos este nuevo vértice a cada uno de los n vértices de C_n, por nuevas aristas.
- Las ruedas W_3, W_4, W_5 y W_6 se muestran en la Figura 6.

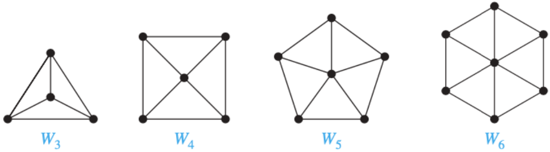


Figura 6: Las ruedas W_3, W_4, W_5 y W_6.

Ejemplo 8

n-Cubos

Ejemplo 8

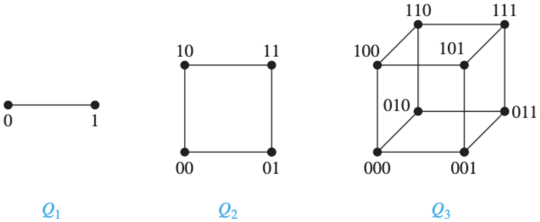
n-Cubos

- Un **hipercubo n-dimensional**, o **n-cubo**, denotado por Q_n, es un grafo que tiene vértices que representan las cadenas de 2^n bits de longitud n.

Ejemplo 8

n-Cubos

- Un **hipercubo n-dimensional**, o **n-cubo**, denotado por Q_n, es un grafo que tiene vértices que representan las cadenas de 2^n bits de longitud n.
- Dos vértices son adyacentes si y sólo si las cadenas de bits que representan difieren exactamente en la posición de un bit. Mostramos Q_1, Q_2 y Q_3 en la Figura 7.



1. Para cada uno de los grafos no dirigidos en la Figura 8, encuentre el número de vértices, el número de aristas y el grado de cada vértice. Identifique todos los vértices aislados y colgantes.

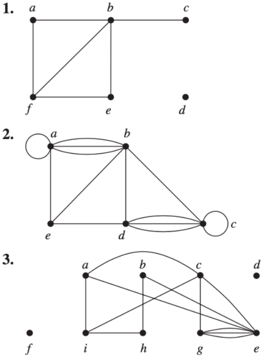


Figura 8: Grafos no dirigidos para los Ejercicios 1 y 2.

2. Encuentra la suma de los grados de los vértices de cada grafo en la Figura 8 y verifica que sea igual al doble del número de aristas en el grafo.
3. Para cada uno de los multigrafos dirigidos en la Figura 9, determine el número de vértices y aristas, también encuentre el grado de entrada y el grado de salida de cada vértice.

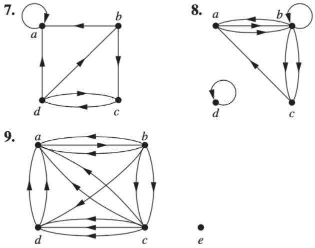


Figura 9: Multigrafos dirigidos para los Ejercicio 3 y 4.

Ejercicios III

4. Para cada uno de los multigrafos dirigidos en la Figura 9, determine la suma de los grados de entrada de los vértices y la suma de los grados de salida de los vértices directamente. Demuestre que ambos son iguales al número de aristas en el grafo.
5. ¿Qué representa el grado de un vértice en el grafo de conocidos, donde los vértices representan a todas las personas del mundo? ¿Qué representa la vecindad de un vértice en este grafo? ¿Qué representan las vértices aisladas y colgantes en este grafo? En un estudio se estimó que el grado promedio de un vértice en este grafo es 1000. ¿Qué significa esto en términos del modelo?
6. ¿Qué representa el grado de un vértice en un grafo de colaboración académica? ¿Qué representa la vecindad de un vértice? ¿Qué representan los vértices aislados y colgantes?
7. ¿Qué representan el grado de entrada y el grado de salida de un vértice en un grafo dirigido que modela un torneo round-robin?