

Grafos I

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Estructuras Discretas CCOS 009

Primavera 2021

- 1 Motivación
- 2 Grafos
- 3 Modelos de Grafos
- 4 Ejercicios

Motivación I

- Los grafos son estructuras discretas que constan de vértices y aristas que conectan estos vértices.

- Hay diferentes tipos de grafos, dependiendo de si las aristas tienen direcciones, si varias aristas pueden conectar el mismo par de vértices y si se permiten ciclos.

- Los problemas en casi todas las disciplinas imaginables se pueden resolver utilizando modelos de grafos.

- Daremos ejemplos para ilustrar cómo se utilizan los grafos como modelos en una variedad de áreas.

- Por ejemplo, mostraremos cómo se usan los grafos para representar la competencia de diferentes especies en un nicho ecológico, cómo se usan los grafos para representar quién influye en quién en una organización y cómo se usan los grafos para representar los resultados de los torneos de todos contra todos.

- Describiremos cómo se pueden utilizar los grafos para modelar relaciones entre personas, colaboración entre investigadores, llamadas telefónicas entre números de teléfono y enlaces entre sitios web.

- Mostraremos cómo se pueden utilizar los grafos para modelar hojas de ruta y la asignación de trabajos a los empleados de una organización.

- Usando modelos de grafos, podemos determinar si es posible caminar por todas las calles de una ciudad sin tener que recorrer una calle dos veces, y podemos encontrar la cantidad de colores necesarios para colorear las regiones de un mapa.

- Se pueden usar grafos para determinar si un circuito se puede implementar en una placa de circuito plana.

Motivación III

- Podemos distinguir entre dos compuestos químicos con la misma fórmula molecular pero diferentes estructuras usando grafos.

- Podemos determinar si dos computadoras están conectadas por un enlace de comunicaciones usando modelos de grafos de redes de computadoras.

- Los grafos con pesos asignados a sus aristas se pueden usar para resolver problemas como encontrar el camino más corto entre dos ciudades en una red de transporte.

- También podemos utilizar grafos para programar exámenes y asignar canales a estaciones de televisión.

- Este capítulo introducirá los conceptos básicos de la teoría de grafos y presentará muchos modelos de grafos diferentes.

- Para resolver la amplia variedad de problemas que se pueden estudiar utilizando grafos, presentaremos muchos algoritmos de grafos diferentes.

- También estudiaremos la complejidad de estos algoritmos.

Definición 1

Un grafo $G = (V, E)$ consta de V , un conjunto no vacío de *vértices* (o *nodos*) y E , un conjunto de *aristas*. Cada arista tiene uno o dos vértices asociados, llamados *puntos finales*. Se dice que una arista *conecta* sus puntos finales.

Observación 1

El conjunto de vértices V de un grafo G puede ser infinito. Un grafo con un conjunto de vértices infinito o un número infinito de aristas se llama **grafo infinito** y, en comparación, un grafo con un conjunto de vértices finito y un conjunto de aristas finito se llama **grafo finito**. En este libro, por lo general, consideraremos sólo grafo finitos.



- Ahora suponga que una red está formada por centros de datos y enlaces de comunicación entre computadoras.

- Podemos representar la ubicación de cada centro de datos por un punto y cada enlace de comunicaciones por un segmento de línea, como se muestra en la Figura 1.

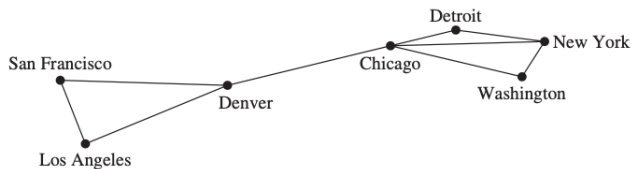


Figura 1: Una red de computadoras.

- Esta red de computadoras se puede modelar mediante un grafo en el que los vértices del grafo representan los centros de datos y las aristas representan los enlaces de comunicación.

- En general, visualizamos grafos usando puntos para representar vértices y segmentos de línea, posiblemente curvos, para representar aristas, donde los puntos finales de un segmento de línea que representa una arista son los puntos que representan los puntos finales de la arista.

- Cuando dibujamos un grafo, generalmente tratamos de dibujar las aristas para que no se crucen.

- Sin embargo, esto no es necesario porque se puede usar cualquier representación que use puntos para representar vértices y cualquier forma de conexión entre vértices.

- De hecho, hay algunos grafos que no se pueden dibujar en el plano sin que las aristas se crucen.

- El punto clave es que la forma en que dibujamos un grafo es arbitraria, siempre que se describan las conexiones correctas entre los vértices.

- Tenga en cuenta que cada arista del grafo que representa esta red de computadoras conecta dos vértices diferentes.

- Es decir, ninguna arista conecta un vértice consigo mismo.

- Además, no hay dos aristas diferentes que conecten el mismo par de vértices.

- Un grafo en el que cada arista conecta dos vértices diferentes y donde no hay dos aristas que conecten el mismo par de vértices se llama grafo simple.

- Tenga en cuenta que en un grafo simple, cada arista está asociado a un par de vértices desordenado, y ninguna otra arista está asociada a esta misma arista.

- En consecuencia, cuando hay una arista de un grafo simple asociado a $\{u, v\}$, también podemos decir, sin posible confusión, que $\{u, v\}$ es una arista del grafo.

- Una red de computadoras puede contener múltiples enlaces entre los centros de datos, como se muestra en la Figura 2.

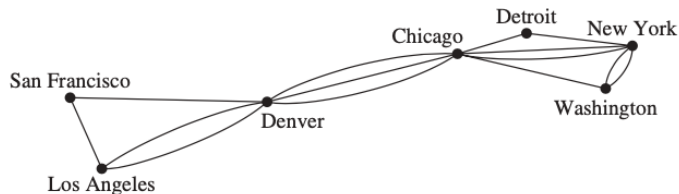


Figura 2: Una red de computadoras con enlaces múltiples entre los centros de datos.

- Para modelar tales redes, necesitamos grafos que tengan más de una arista que conecte el mismo par de vértices.

- Los grafos que pueden tener múltiples aristas que conectan los mismos vértices se denominan **multigrafos**.

- Cuando hay m aristas diferentes asociadas al mismo par desordenado de vértices $\{u, v\}$, también decimos que $\{u, v\}$ es una arista de multiplicidad m .

- Es decir, podemos pensar en este conjunto de aristas como m copias diferentes de una arista $\{u, v\}$.

- A veces, un enlace de comunicaciones conecta un centro de datos consigo mismo, tal vez un circuito de retroalimentación con fines de diagnóstico. Tal red se ilustra en la Figura 3.

- Para modelar esta red, necesitamos incluir aristas que conecten un vértice consigo mismo. Estas aristas se denominan **ciclos** y, a veces, incluso podemos tener más de un ciclo en un vértice.

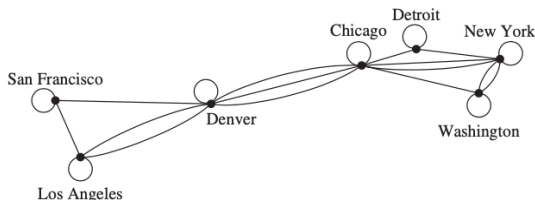


Figura 3: Una red de computadoras con enlaces de diagnóstico.

- Los grafos que pueden incluir ciclos y posiblemente varias aristas que conectan el mismo par de vértices a veces se denominan **pseudografos**.

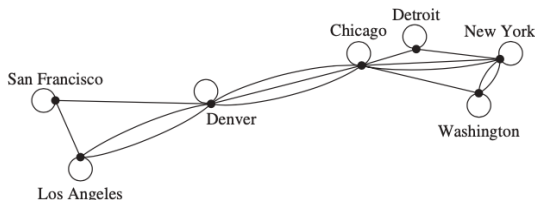


Figura 3: Una red de computadoras con enlaces de diagnóstico.

- Hasta ahora, los grafos que hemos introducido son **grafos no dirigidos**.

- También se dice que sus aristas **no están dirigidas**.

- Sin embargo, para construir un modelo de grafos, puede ser necesario asignar direcciones a las aristas de un grafo.

- Por ejemplo, en una red de computadoras, algunos enlaces pueden operar en una sola dirección (tales enlaces se denominan líneas dúplex simples).

- Este puede ser el caso si se envía una gran cantidad de tráfico a algunos centros de datos, con poco o ningún tráfico en la dirección opuesta.

- Tal red se muestra en la Figura 4.

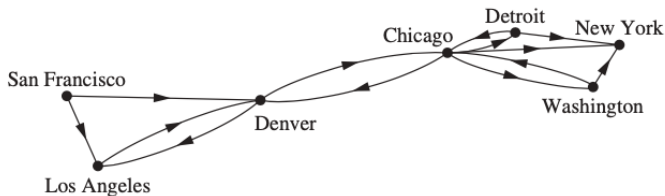


Figura 4: Una red de computadoras con enlaces de comunicación en un solo sentido.

- Para modelar una red de computadoras de este tipo, utilizamos un grafo dirigido.

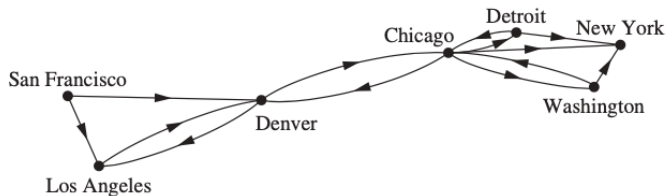


Figura 4: Una red de computadoras con enlaces de comunicación en un solo sentido.

- Cada arista de un grafo dirigido está asociada a un par ordenado.

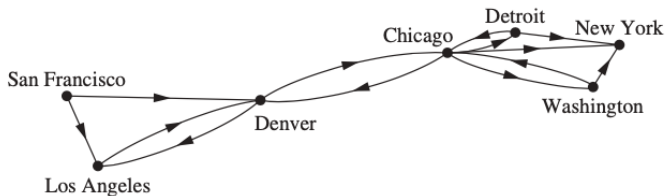


Figura 4: Una red de computadoras con enlaces de comunicación en un solo sentido.

- La definición de grafo dirigido que damos aquí es más general que la que enunciamos en el Capítulo 2, donde usamos grafos dirigidos para representar relaciones.

Definición 2

Un *grafo dirigido* (o *digrafo*) (V, E) consiste en un conjunto no vacío de vértices V y un conjunto de *aristas dirigidas* (o *arcos*) E . Cada arista dirigida está asociada con un par ordenado de vértices. Se dice que la arista dirigida asociada con el par ordenado (u, v) *comienza* en u y *termina* en v .

- Cuando representamos un grafo dirigido con un dibujo lineal, usamos una flecha que apunta de u a v para indicar la dirección de una arista que comienza en u y termina en v .

- Un grafo dirigido puede contener ciclos y puede contener múltiples aristas dirigidas que comienzan y terminan en los mismos vértices.

- Un grafo dirigido también puede contener aristas dirigidas que conectan los vértices u y v en ambas direcciones; es decir, cuando un digrafo contiene una arista de u a v , también puede contener una o más aristas de v a u .

- Tenga en cuenta que obtenemos un grafo dirigido cuando asignamos una dirección a cada arista en un grafo no dirigido.

- Cuando un grafo dirigido no tiene ciclos y no tiene múltiples aristas dirigidas, se denomina **grafo dirigido simple**.

- Debido a que un grafo dirigido simple tiene como máximo una arista asociada a cada par ordenado de vértices (u, v) , llamamos a (u, v) una arista si hay una arista asociada a él en el grafo.

- En algunas redes de computadoras, pueden estar presentes múltiples enlaces de comunicación entre dos centros de datos, como se ilustra en la Figura 5.

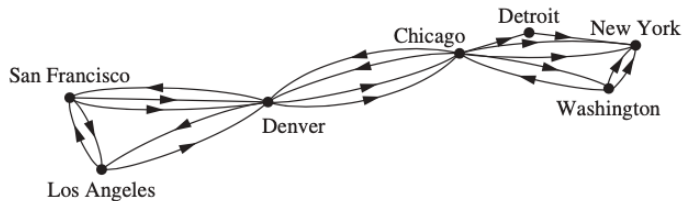


Figura 5: Una red de computadoras con múltiples enlaces de un solo sentido.

- Los grafos dirigidos que pueden tener **múltiples aristas dirigidas** desde un vértice a un segundo vértice (posiblemente el mismo) se utilizan para modelar dichas redes.

- A estos grafos los llamamos **multigrafos dirigidos**.

- Cuando hay m aristas dirigidas, cada una asociada a un par ordenado de vértices (u, v) , decimos que (u, v) es una arista de **multiplicidad** m .

- Para algunos modelos, es posible que necesitemos un grafo en el que algunas aristas no estén dirigidas, mientras que otras sí.

- Un grafo con aristas tanto dirigidas como no dirigidas se llama **grafo mixto**.

- Por ejemplo, un grafo mixto podría usarse para modelar una red de computadoras que contiene enlaces que operan en ambas direcciones y otros enlaces que operan sólo en una dirección.

- Esta terminología para los diversos tipos de grafos se resume en la Tabla 1.

- A veces usaremos el término grafo como un término general para describir grafos con aristas dirigidas o no dirigidas (o ambas), con o sin ciclos y con o sin múltiples aristas.

- En otras ocasiones, cuando el contexto sea claro, usaremos el término grafo para referirnos sólo a grafos no dirigidos.

TABLE 1 Graph Terminology.

<i>Type</i>	<i>Edges</i>	<i>Multiple Edges Allowed?</i>	<i>Loops Allowed?</i>
Simple graph	Undirected	No	No
Multigraph	Undirected	Yes	No
Pseudograph	Undirected	Yes	Yes
Simple directed graph	Directed	No	No
Directed multigraph	Directed	Yes	Yes
Mixed graph	Directed and undirected	Yes	Yes

Tabla 1: Terminología en Teoría de Grafos.

- Debido al interés relativamente moderno en la teoría de grafos, y debido a que tiene aplicaciones en una amplia variedad de disciplinas, se han introducido muchas terminologías diferentes de la teoría de grafos.

- El lector debe determinar cómo se utilizan esos términos cada vez que se encuentran.

- La terminología utilizada por los matemáticos para describir los grafos se ha estandarizado cada vez más, pero la terminología utilizada para discutir los grafos cuando se utilizan en otras disciplinas sigue siendo bastante variada.

- Aunque la terminología utilizada para describir los grafos puede variar, tres preguntas clave pueden ayudarnos a comprender la estructura de un grafo:
 - ¿Las aristas del grafo no están dirigidas o están dirigidas (o ambas)?
 - Si el grafo no está dirigido, ¿existen múltiples aristas que conectan el mismo par de vértices? Si el grafo está dirigido, ¿existen múltiples aristas dirigidas?
 - ¿Hay ciclos?

- Responder a estas preguntas nos ayuda a comprender los grafos. Es menos importante recordar la terminología particular utilizada.

- Los grafos se utilizan ampliamente para modelar estructuras sociales basadas en diferentes tipos de relaciones entre personas o grupos de personas.

- Estas estructuras sociales, y los grafos que las representan, se conocen como **redes sociales**.

- En estos modelos de grafos, los individuos u organizaciones están representados por vértices; las relaciones entre individuos u organizaciones están representadas por aristas.

- El estudio de las redes sociales es un área multidisciplinaria extremadamente activa, y se han estudiado muchos tipos diferentes de relaciones entre personas a través de ellas.

- Aquí presentaremos algunas de las redes sociales más estudiadas.

- En los estudios de comportamiento grupal se observa que determinadas personas pueden influir en el pensamiento de otras.

- Se puede utilizar un grafo dirigido llamado **grafo de influencia** para modelar este comportamiento.

- Cada persona del grupo está representada por un vértice.

- Hay una arista dirigida desde el vértice a al vértice b cuando la persona representada por el vértice a puede influir en la persona representada por el vértice b .

- Este grafo no contiene ciclos y no contiene múltiples aristas dirigidas.

- En la Figura 6 se muestra un ejemplo de un grafo de influencia para los miembros de un grupo.

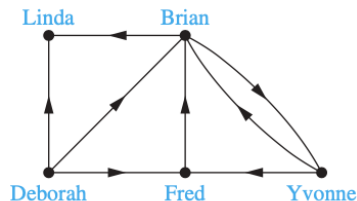


Figura 6: Un grafo de influencia.

- En el grupo modelado por este grafo de influencia, Deborah no puede ser influenciada, pero puede influir en Brian, Fred y Linda.

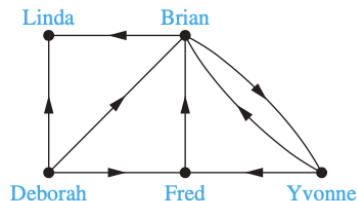


Figura 6: Un grafo de influencia.

- Además, Yvonne y Brian pueden influirse mutuamente.

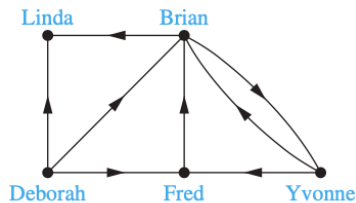


Figura 6: Un grafo de influencia.

- Podemos modelar diferentes redes de comunicaciones utilizando vértices para representar dispositivos y aristas para representar el tipo particular de enlaces de comunicaciones de interés.

- Ya hemos modelado una red de datos en la primera parte de esta sección.

- La web se puede modelar como un grafo dirigido donde cada página web está representada por un vértice y donde una arista comienza en la página web a y termina en la página web b si hay un enlace en a apuntando a b .

- Debido a que se crean nuevas páginas web y otras se eliminan en algún lugar de la web casi cada segundo, el grafo de la web cambia de forma casi continua.

- Mucha gente está estudiando las propiedades del grafo de la web para comprender mejor la naturaleza de la web.

- Los modelos de grafos son herramientas útiles en el diseño de software.

APLICACIONES DE DISEÑO DE SOFTWARE (Grafos de dependencias de módulos)

- Un **grafo de dependencias de módulos** proporciona una herramienta útil para comprender cómo interactúan los diferentes módulos de un programa.

APLICACIONES DE DISEÑO DE SOFTWARE (Grafos de dependencias de módulos)

- En un grafo de dependencias de un programa, cada módulo está representado por un vértice.

APLICACIONES DE DISEÑO DE SOFTWARE (Grafos de dependencias de módulos)

- Hay una arista dirigida de un módulo a un segundo módulo si el segundo módulo depende del primero.

APLICACIONES DE DISEÑO DE SOFTWARE (Grafos de dependencias de módulos)

- En la Figura 7 se muestra un ejemplo de un grafo de dependencias del programa para un navegador web.

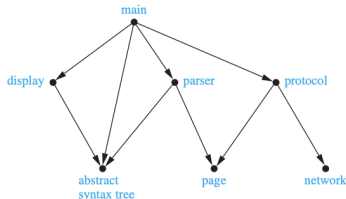


Figura 7: Un grafo de dependencias de módulos.

- Podemos usar grafos para modelar muchos tipos diferentes de redes de transporte, incluidas las redes de carreteras, aéreas y ferroviarias, así como las redes de envío.

- Concretamente, podemos modelar todos los vuelos de una aerolínea en particular cada día usando una arista dirigida para representar cada vuelo, yendo desde el vértice que representa el aeropuerto de salida hasta el vértice que representa el aeropuerto de destino.

- El grafo resultante generalmente será un multigrafo dirigido, ya que puede haber varios vuelos de un aeropuerto a otro aeropuerto durante el mismo día.

REDES BIOLÓGICAS (Grafos de superposición de nichos en ecología) I

- Muchos aspectos de las ciencias biológicas se pueden modelar utilizando grafos.

REDES BIOLÓGICAS (Grafos de superposición de nichos en ecología) I

- Los grafos se utilizan en muchos modelos que involucran la interacción de diferentes especies de animales.

REDES BIOLÓGICAS (Grafos de superposición de nichos en ecología) I

- Por ejemplo, la competencia entre especies en un ecosistema se puede modelar utilizando un grafo de superposición de nichos.

REDES BIOLÓGICAS (Grafos de superposición de nichos en ecología) I

- Cada especie está representada por un vértice.

REDES BIOLÓGICAS (Grafos de superposición de nichos en ecología) I

- Una arista no dirigida conecta dos vértices si las dos especies representadas por estos vértices compiten (es decir, algunos de los recursos alimenticios que utilizan son los mismos).

REDES BIOLÓGICAS (Grafos de superposición de nichos en ecología) II

- Un grafo de superposición de nichos es un grafo simple porque no se necesitan ciclos ni aristas múltiples en este modelo.

REDES BIOLÓGICAS (Grafos de superposición de nichos en ecología) II

- El grafo de la Figura 8 modela el ecosistema de un bosque.

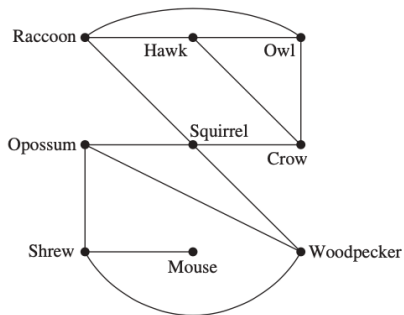


Figura 8: Un grafo de superposición de nichos.

REDES BIOLÓGICAS (Grafos de superposición de nichos en ecología) II

- Vemos en este grafo que las ardillas y los mapaches compiten pero que los cuervos y las musarañas no lo hacen.

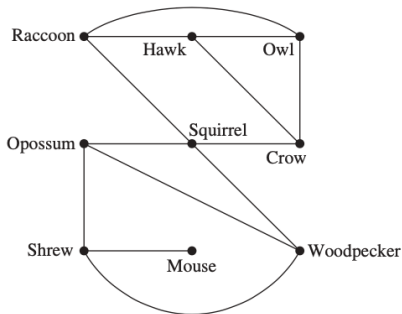


Figura 8: Un grafo de superposición de nichos.

- Los modelos de grafos se utilizan ampliamente en la comprensión del lenguaje natural (NLU) y en la recuperación de información (IR).

- En los modelos de grafos para aplicaciones NLU e IR, los vértices a menudo representan palabras, frases u oraciones, y las aristas representan conexiones relacionadas con el significado de estos objetos.

- Una relación semántica es una relación entre dos o más palabras que se basa en el significado de las palabras.

- Por ejemplo, podemos construir un grafo en el que los vértices representan sustantivos y dos vértices están conectados cuando tienen un significado similar.

- Otro ejemplo, los nombres de diferentes países tienen un significado similar, al igual que los nombres de diferentes verduras.

- La Figura 9 muestra un pequeño grafo donde los vértices representan sustantivos y las aristas conectan palabras con un significado similar.

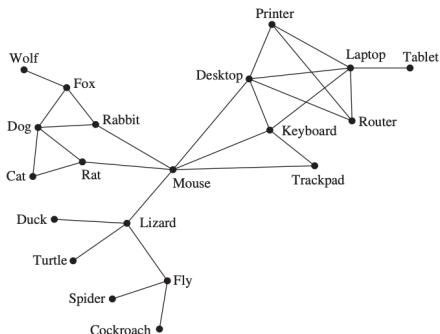


Figura 9: Una red semántica de sustantivos con un significado similar centrada en la palabra mouse.

- Este grafo se centra en la palabra mouse.

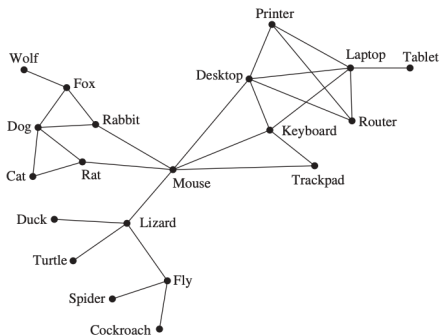


Figura 9: Una red semántica de sustantivos con un significado similar centrada en la palabra mouse.

- El grafo ilustra que hay dos significados distintos para mouse.

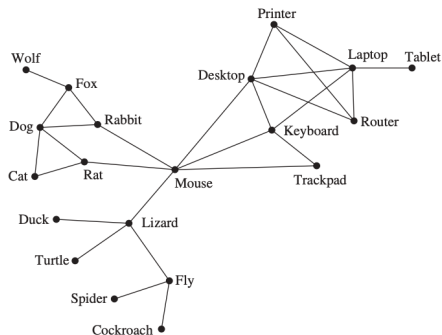


Figura 9: Una red semántica de sustantivos con un significado similar centrada en la palabra mouse.

- Puede referirse a un animal o puede referirse a hardware de computadora.

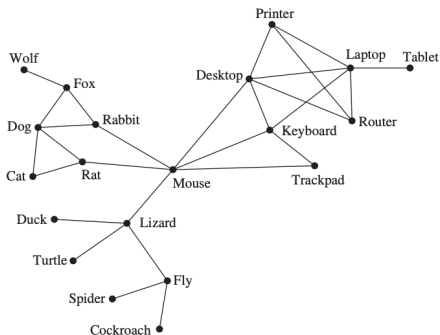


Figura 9: Una red semántica de sustantivos con un significado similar centrada en la palabra mouse.

Torneos (Round-Robin) I

- Un torneo en el que cada equipo juega contra todos los demás equipos exactamente una vez y no se permiten empates se denomina torneo round-robin.

Torneos (Round-Robin) I

- Estos torneos se pueden modelar utilizando grafos dirigidos donde cada equipo está representado por un vértice.

- Tenga en cuenta que (a, b) es una arista si el equipo a vence al equipo b .

- Este grafo es un grafo dirigido simple, que no contiene ciclo ni aristas dirigidas múltiples (porque no hay dos equipos que jueguen entre sí más de una vez).

- Este modelo de grafo dirigido se presenta en la Figura 10.

Torneos (Round-Robin) I

- Vemos que el Equipo 1 está invicto en este torneo y el Equipo 3 no ha ganado.

Torneos (Round-Robin) II

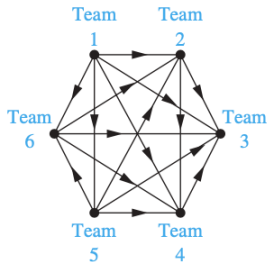


Figura 10: Un modelo de grafo de un torneo round-robin.

- 1 Construya un grafo de influencia para los miembros de la junta de una empresa si el presidente puede influir en el director de investigación y desarrollo, el director de marketing y el director de operaciones; el Director de Investigación y Desarrollo puede influir en el Director de Operaciones; el director de marketing puede influir en el director de operaciones; y nadie puede influir ni ser influenciado por el Director Financiero.
- 2 La palabra manzana puede referirse a una planta, un alimento o una empresa de computadoras. Construya un grafo de palabras para estos sustantivos: manzana, fresa, lenovo, queso, chocolate, ibm, roble, microsoft, seto, hierba, pastel, quiche, hp, sidra, rosquilla, azalea, pino, dell, abeto, frambuesa. Conecte dos vértices por una arista no dirigida si los sustantivos que representan tienen un significado similar.

- 3 La palabra rock puede referirse a un tipo de música o a algo de una montaña. Construya un grafo de palabras para estos sustantivos: roca, piedra, jazz, piedra caliza, grava, folk, bachata, piedra pómez, granito, tango, klezmer, pizarra, pizarra, clásica, guijarros, arena, rap, mármol. Conecte dos vértices por una arista no dirigida si los sustantivos que representan tienen un significado similar.
- 4 ¿A qué otros equipos venció el Equipo 4 y qué equipos vencieron al Equipo 4 en el torneo round-robin representado por el grafo de la Figura 10?
- 5 En un torneo round-robin los Tigres vencieron a los Azulejos, los Tigres vencieron a los Cardenales, los Tigres vencieron a los Orioles, los Azulejos vencieron a los Cardenales, los Azulejos vencieron a los Orioles y los Cardenales vencieron a los Orioles. Modele este resultado con un grafo dirigido.

- 6 Construya el grafo de llamadas para un conjunto de siete números de teléfono 555-0011, 555-1221, 555-1333, 555-8888, 555-2222, 555-0091 y 555-1200 si hubo tres llamadas del 555-0011 al 555 -8888 y dos llamadas del 555-8888 al 555-0011, dos llamadas del 555-2222 al 555-0091, dos llamadas del 555-1221 a cada uno de los otros números y una llamada del 555-1333 a cada uno de los 555- 0011, 555-1221 y 555-1200.