Relaciones V

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Estructuras Discretas CCOS 009

Primavera 2021

Contenido

Motivación

- A menudo usamos relaciones para ordenar algunos o todos los elementos de los conjuntos.

Motivación

- Por ejemplo, ordenamos las palabras usando la relación que contiene pares de palabras (x, y), donde x está antes que y en el diccionario.

Motivación

- Programamos proyectos usando la relación que consta de pares (x, y), donde x y y son tareas en un proyecto de manera que x debe completarse antes de que comience y.

Motivación

- Ordenamos el conjunto de números enteros usando la relación que contiene los pares (x, y), donde x es menor que y.

Motivación

- Cuando agregamos todos los pares de la forma (x, x) a estas relaciones, obtenemos una relación que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Motivación

- Estas son propiedades que caracterizan las relaciones utilizadas para ordenar los elementos de los conjuntos.

Conjunto parcialmente ordenado

Definición 1

Una relación R sobre un conjunto S se denomina *ordenamiento parcial* u *orden parcial* si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Un conjunto S junto con un orden parcial R se denomina *conjunto parcialmente ordenado*, o *poset*, y se denota por (S, R). Los miembros de S se denominan elementos del poset.

Ejemplo 1

Ejemplo 1

Demuestre que la relación mayor o igual que $(\geq)$ es un ordenamiento parcial en el conjunto de números enteros.

Ejemplo 1

Demuestre que la relación mayor o igual que $(\geq)$ es un ordenamiento parcial en el conjunto de números enteros.

Solución:

- Debido a que $a \geq a$ para todo entero a, $\geq$ es reflexiva.

Ejemplo 1

Demuestre que la relación mayor o igual que $(\geq)$ es un ordenamiento parcial en el conjunto de números enteros.

Solución:

- Si $a \geq b$ y $b \geq a$, entonces $a = b$; por tanto, $\geq$ es antisimétrica.

Ejemplo 1

Demuestre que la relación mayor o igual que $(\geq)$ es un ordenamiento parcial en el conjunto de números enteros.

Solución:

- Finalmente, $\geq$ es transitiva porque $a \geq b$ y $b \geq c$ implican que $a \geq c$.

Ejemplo 1

Demuestre que la relación mayor o igual que $(\geq)$ es un ordenamiento parcial en el conjunto de números enteros.

Solución:

- De ello se deduce que $\geq$ es un orden parcial sobre el conjunto de números enteros y $(\mathbb{Z}, \geq)$ es un poset. $\square$

Ejemplo 2

La relación de divisibilidad $|$ es un ordenamiento parcial sobre el conjunto de números enteros positivos, porque es reflexiva, antisimétrica y transitiva, como se mostró en la sección 2.1. Vemos que $(\mathbb{Z}^+, |)$ es un poset. Recuerde que ($\mathbb{Z}^+$ denota el conjunto de enteros positivos). $\square$

Ejemplo 3

Demuestre que la relación de inclusión $\subseteq$ es un ordenamiento parcial sobre el conjunto de potencias de un conjunto S.

Ejemplo 3

Ejemplo 3

Demuestre que la relación de inclusión $\subseteq$ es un ordenamiento parcial sobre el conjunto de potencias de un conjunto S.

Solución:

- Como $A \subseteq A$ siempre que A es un subconjunto de S, $\subseteq$ es reflexiva.

Ejemplo 3

Demuestre que la relación de inclusión $\subseteq$ es un ordenamiento parcial sobre el conjunto de potencias de un conjunto S.

Solución:

- Es antisimétrica porque $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ implican que $A = B$.

Ejemplo 3

Demuestre que la relación de inclusión $\subseteq$ es un ordenamiento parcial sobre el conjunto de potencias de un conjunto S.

Solución:

- Finalmente, $\subseteq$ es transitiva, porque $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ implican que $A \subseteq C$.

Ejemplo 3

Demuestre que la relación de inclusión $\subseteq$ es un ordenamiento parcial sobre el conjunto de potencias de un conjunto S.

Solución:

- Por lo tanto, $\subseteq$ es un ordenamiento parcial sobre $\mathcal{P}(S)$, y $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un poset. $\square$

Ejemplo 4

Sea R la relación sobre el conjunto de personas tal que xRy si x y y son personas y x es mayor que y. Muestre que R no es un ordenamiento parcial.

Ejemplo 4

Sea R la relación sobre el conjunto de personas tal que xRy si x y y son personas y x es mayor que y. Muestre que R no es un ordenamiento parcial.

Solución:

- Tenga en cuenta que R es antisimétrica porque si una persona x es mayor que una persona y, entonces y no es mayor que x. Es decir, si xRy, entonces $y \not R x$.

Ejemplo 4

Sea R la relación sobre el conjunto de personas tal que xRy si x y y son personas y x es mayor que y. Muestre que R no es un ordenamiento parcial.

Solución:

- La relación R es transitiva porque si la persona x es mayor que la persona y y y es mayor que la persona z, entonces x es mayor que z. Es decir, si xRy y yRz, entonces xRz.

Ejemplo 4

Ejemplo 4

Sea R la relación sobre el conjunto de personas tal que xRy si x y y son personas y x es mayor que y. Muestre que R no es un ordenamiento parcial.

Solución:

- Sin embargo, R no es reflexiva, porque ninguna persona es mayor que él o ella. Es decir, $x \not R x$ para todas las personas x. De ello se deduce que R no es un ordenamiento parcial. $\square$

Notación I

- En diferentes posets, se utilizan distintos símbolos como $\leq$, $\subseteq$ y $|$ para denotar un ordenamiento parcial.

Notación I

- Sin embargo, necesitamos un símbolo que podamos usar cuando analicemos la relación de ordenamiento en un conjunto arbitrario.

Notación I

- Habitualmente, la notación $a \preccurlyeq b$ se usa para denotar que $(a, b) \in R$ en un poset arbitrario (S, R).

Notación I

- Esta notación se usa porque la relación menor o igual a en el conjunto de números reales es el ejemplo más familiar de un orden parcial y el símbolo $\preccurlyeq$ es similar al símbolo $\leq$.

Notación I

- Tenga en cuenta que el símbolo $\preccurlyeq$ se usa para denotar la relación en cualquier poset, no solo la relación menor o igual a.

Notación II

- La notación $a \prec b$ denota que $a \preccurlyeq b$, pero $a \neq b$.

Notación II

- Además, decimos "a es menor que b" o "b es mayor que a" si $a \prec b$.

Notación II

- Cuando a y b son elementos del poset $(S, \preccurlyeq)$, no es necesario que $a \preccurlyeq b$ o $b \preccurlyeq a$.

Notación II

- Por ejemplo, en $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$, $\{1, 2\}$ no está relacionado con $\{1, 3\}$, y viceversa, porque ningún conjunto está contenido dentro del otro.

Notación II

- De manera similar, en $(\mathbb{Z}^+, |)$, 2 no está relacionado con 3 y 3 no está relacionado con 2, porque $2 \not| 3$ y $3 \not| 2$.

Notación II

- Esto conduce a la Definición 2.

Definición 2

Los elementos a y b de un poset $(S, \preccurlyeq)$ se denominan *comparables* si $a \preccurlyeq b$ o $b \preccurlyeq a$. Cuando a y b son elementos de S tales que ni $a \preccurlyeq b$ ni $b \preccurlyeq a$, a y b se denominan *incomparables*.

Ejemplo 5

Ejemplo 5

En el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$, ¿son comparables los números enteros 3 y 9? ¿Son comparables el 5 y el 7?

Ejemplo 5

En el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$, ¿son comparables los números enteros 3 y 9? ¿Son comparables el 5 y el 7?

Solución:

- Los enteros 3 y 9 son comparables, porque $3|9$.

Ejemplo 5

Ejemplo 5

En el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$, ¿son comparables los números enteros 3 y 9? ¿Son comparables el 5 y el 7?

Solución:

- Los enteros 5 y 7 son incomparables, porque $5 \not| 7$ y $7 \not| 5$. $\square$

Conjunto totalmente ordenado

- El adjetivo “parcial” se utiliza para describir ordenamientos parciales porque algunos pares de elementos pueden ser incomparables.

Conjunto totalmente ordenado

- Cuando cada dos elementos del conjunto son comparables, la relación se denomina **orden total**.

Conjunto totalmente ordenado

Definición 3

Si $(S, \preccurlyeq)$ es un poset y cada dos elementos de S son comparables, S se llama un *conjunto totalmente ordenado* o *linealmente ordenado*, y $\preccurlyeq$ se llama *orden total* u *orden lineal*. Un conjunto totalmente ordenado también se llama *cadena*.

Ejemplo 6

El poset $(\mathbb{Z}, \leq)$ está totalmente ordenado, porque $a \leq b$ o $b \leq a$ siempre que a y b son números enteros. $\square$

Ejemplos 6 y 7

Ejemplo 7

El poset $(\mathbb{Z}^+, |)$ no está totalmente ordenado porque contiene elementos incomparables, como 5 y 7. $\square$

Conjunto Bien Ordenado

Definición 4

$(S, \preccurlyeq)$ es un *conjunto bien ordenado* si es un poset tal que $\preccurlyeq$ es un ordenamiento total y cada subconjunto no vacío de S tiene un elemento mínimo.

Ejemplo 8

- El conjunto de pares ordenados de enteros positivos, $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, con $(a_1, a_2) \preccurlyeq (b_1, b_2)$ si $a_1 < b_1$, o si $a_1 = b_1$ y $a_2 \leq b_2$ (el orden lexicográfico), es un conjunto bien ordenado.

Ejemplo 8

- El conjunto $\mathbb{Z}$, con el orden $\leq$ habitual, no está bien ordenado porque el conjunto de enteros negativos, que es un subconjunto de $\mathbb{Z}$, no tiene elemento mínimo. $\square$

Principio de Inducción Bien Ordenada

Teorema 1

EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN BIEN ORDENADA Suponga que S es un conjunto bien ordenado. Entonces $P(x)$ es cierto para todo $x \in S$, si
PASO INDUCTIVO: Para cada $y \in S$, si $P(x)$ es verdadero para todo $x \in S$ con $x \prec y$, entonces $P(y)$ es verdadero.

Principio de Inducción Bien Ordenada

Teorema 1

EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN BIEN ORDENADA Suponga que S es un conjunto bien ordenado. Entonces $P(x)$ es cierto para todo $x \in S$, si
PASO INDUCTIVO: Para cada $y \in S$, si $P(x)$ es verdadero para todo $x \in S$ con $x \prec y$, entonces $P(y)$ es verdadero.

Demostración:

- Suponga que no es el caso de que $P(x)$ sea verdadero para todo $x \in S$.

Principio de Inducción Bien Ordenada

Teorema 1

EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN BIEN ORDENADA Suponga que S es un conjunto bien ordenado. Entonces $P(x)$ es cierto para todo $x \in S$, si
PASO INDUCTIVO: Para cada $y \in S$, si $P(x)$ es verdadero para todo $x \in S$ con $x \prec y$, entonces $P(y)$ es verdadero.

Demostración:

- Entonces hay un elemento $y \in S$ tal que $P(y)$ es falso.

Principio de Inducción Bien Ordenada

Teorema 1

EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN BIEN ORDENADA Suponga que S es un conjunto bien ordenado. Entonces $P(x)$ es cierto para todo $x \in S$, si
PASO INDUCTIVO: Para cada $y \in S$, si $P(x)$ es verdadero para todo $x \in S$ con $x \prec y$, entonces $P(y)$ es verdadero.

Demostración:

- En consecuencia, el conjunto $A = \{x \in S | P(x) \text{ es falso}\}$ no está vacío.

Teorema 1

EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN BIEN ORDENADA Suponga que S es un conjunto bien ordenado. Entonces $P(x)$ es cierto para todo $x \in S$, si
PASO INDUCTIVO: Para cada $y \in S$, si $P(x)$ es verdadero para todo $x \in S$ con $x \prec y$, entonces $P(y)$ es verdadero.

Demostración:

- Como S está bien ordenado, A tiene un elemento mínimo a.

Principio de Inducción Bien Ordenada

Teorema 1

EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN BIEN ORDENADA Suponga que S es un conjunto bien ordenado. Entonces $P(x)$ es cierto para todo $x \in S$, si
PASO INDUCTIVO: Para cada $y \in S$, si $P(x)$ es verdadero para todo $x \in S$ con $x \prec y$, entonces $P(y)$ es verdadero.

Demostración:

- Por la elección de a como elemento mínimo de A, sabemos que $P(x)$ es cierto para todo $x \in S$ con $x \prec a$.

Teorema 1

EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN BIEN ORDENADA Suponga que S es un conjunto bien ordenado. Entonces $P(x)$ es cierto para todo $x \in S$, si
PASO INDUCTIVO: Para cada $y \in S$, si $P(x)$ es verdadero para todo $x \in S$ con $x \prec y$, entonces $P(y)$ es verdadero.

Demostración:

- Esto implica que el paso inductivo $P(a)$ es cierto.

Teorema 1

EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN BIEN ORDENADA Suponga que S es un conjunto bien ordenado. Entonces $P(x)$ es cierto para todo $x \in S$, si
PASO INDUCTIVO: Para cada $y \in S$, si $P(x)$ es verdadero para todo $x \in S$ con $x \prec y$, entonces $P(y)$ es verdadero.

Demostración:

- Esta contradicción muestra que $P(x)$ debe ser verdadero para todo $x \in S$.

■

Observación 1

- No necesitamos un paso base en una demostración que utilice el principio de inducción bien ordenada porque si x_0 es el elemento menor de un conjunto bien ordenado, el paso inductivo nos dice que $P(x_0)$ es verdadero.

Observación 1

Observación 1

- Esto se debe a que no hay elementos $x \in S$ con $x \prec x_0$, por lo que sabemos (usando una prueba vacía) que $P(x)$ es verdadero para todo $x \in S$ con $x \prec x_0$.

Orden Lexicográfico I

- Las palabras en un diccionario se enumeran en orden alfabético o lexicográfico, basándose en el orden de las letras en el alfabeto.

Orden Lexicográfico I

- Este es un caso especial de un ordenamiento de cadenas en un conjunto construido a partir de una ordenamiento parcial en el conjunto.

Orden Lexicográfico I

- Mostraremos cómo funciona esta construcción en cualquier poset.

Orden Lexicográfico I

- Primero, mostraremos cómo construir un ordenamiento parcial sobre el producto cartesiano de dos posets, $(A_1, \preccurlyeq_1)$ y $(A_2, \preccurlyeq_2)$.

Orden Lexicográfico II

- El orden lexicográfico $\preccurlyeq$ sobre $A_1 \times A_2$ se define especificando que un par es menor que un segundo par si la primera entrada del primer par es menor que (en A_1) la primera entrada del segundo par, o si las primeras entradas son iguales, pero la segunda entrada de este par es menor que (en A_2) la segunda entrada del segundo par.

Orden Lexicográfico II

- En otras palabras, (a_1, a_2) es menor que (b_1, b_2), es decir,

$$(a_1, a_2) \prec (b_1, b_2),$$

ya sea que $a_1 \prec_1 b_1$ o si ambos $a_1 = b_1$ y $a_2 \prec_2 b_2$.

Orden Lexicográfico II

- Obtenemos un ordenamiento parcial $\preccurlyeq$ agregando igualdad al ordenamiento $\prec$ sobre $A_1 \times A_2$.

Orden Lexicográfico II

- La verificación de esto se deja como ejercicio.

Ejemplo 9

Determine si $(3,5) \prec (4,8)$, si $(3,8) \prec (4,5)$ y si $(4,9) \prec (4,11)$ en el poset $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \preccurlyeq)$, donde $\preccurlyeq$ es el orden lexicográfico construido a partir de la relación $\leq$ habitual sobre $\mathbb{Z}$.

Solución:

- Como $3 < 4$, se sigue que $(3,5) \prec (4,8)$ y que $(3,8) \prec (4,5)$.
- Tenemos $(4,9) \prec (4,11)$, porque las primeras entradas de $(4,9)$ y $(4,11)$ son iguales pero $9 < 11$.

$\square$

En la Figura 1 se resaltan los pares ordenados en $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ que son menores que $(3, 4)$.

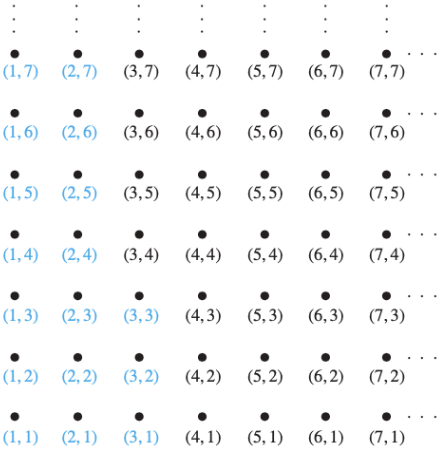

Figura 1: Los pares ordenados menores que $(3, 4)$ en orden lexicográfico.

Orden Lexicográfico IV

- Un orden lexicográfico se puede definir sobre el producto cartesiano de n posets $(A_1, \preccurlyeq_1)$, $(A_2, \preccurlyeq_2), \ldots$, $(A_n, \preccurlyeq_n)$.

Orden Lexicográfico IV

- Defina el orden parcial $\preccurlyeq$ sobre $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ mediante

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \prec (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

si $a_1 \prec_1 b_1$, o si hay un número entero $i > 0$ tal que $a_1 = b_1, \ldots, a_i = b_i$ y $a_{i+1} \prec_{i+1} b_{i+1}$.

Orden Lexicográfico IV

- En otras palabras, una $n-$tupla es menor que una segunda $n-$tupla si la entrada de la primera $n-$tupla en la primera posición donde las dos $n-$tuplas no concuerdan es menor que la entrada en esa posición en la segunda $n-$tupla.

Ejemplo 10

- Tenga en cuenta que $(1, 2, 3, 5) \prec (1, 2, 4, 3)$, porque las entradas en las dos primeras posiciones de estas 4-tuplas coinciden, pero en la tercera posición la entrada en la primera 4-tupla, 3, es menor que en la segunda 4-tupla, 4.

Ejemplo 10

- Aquí el orden en 4-tuplas es el orden lexicográfico que proviene de la relación habitual menor o igual a en el conjunto de números enteros.

□

- Ahora podemos definir el orden lexicográfico de cadenas.

Orden Lexicográfico V

- Considere las cadenas $a_1a_2\cdots a_m$ y $b_1b_2\cdots b_n$ sobre un poset S. parcialmente ordenado.

Orden Lexicográfico V

- Considere las cadenas $a_1a_2\cdots a_m$ y $b_1b_2\cdots b_n$ sobre un poset S. parcialmente ordenado.
- Suponga que estas cadenas no son iguales. Sea t el mínimo de m y n.

Orden Lexicográfico V

- La definición de ordenamiento lexicográfico es que la cadena $a_1a_2\cdots a_m$ es menor que $b_1b_2\cdots b_n$ si y sólo si

$$(a_1, a_2, \cdots, a_t) \prec (b_1, b_2, \cdots, b_t), \text{ o}$$
$$(a_1, a_2, \cdots, a_t) = (b_1, b_2, \cdots, b_t), \text{ y } m < n,$$

donde $\prec$ en esta desigualdad representa el orden lexicográfico de S^t.

Orden Lexicográfico VI

- En otras palabras, para determinar el orden de dos cadenas diferentes, la cadena más larga se trunca a la longitud de la cadena más corta, es decir, $t = \text{mín}(m, n)$ términos.

Orden Lexicográfico VI

- Luego, las $t-$tuplas compuestas por los primeros t términos de cada cadena se comparan usando el orden lexicográfico en S^t.

Orden Lexicográfico VI

- Una cadena es menor que otra cadena si la $t-$tupla correspondiente a la primera cadena es menor que la $t-$tupla de la segunda cadena, o si estas dos $t-$tuplas son iguales, pero la segunda cadena es más larga.

Ejemplo 11

- Considere el conjunto de cadenas de letras minúsculas en inglés.

Ejemplo 11 I

Ejemplo 11

- Usando el orden de las letras en el alfabeto, se puede construir un orden lexicográfico sobre el conjunto de cadenas.

Ejemplo 11

- Una cadena es menor que una segunda cadena si la letra en la primera cadena en la primera posición donde las cadenas difieren es anterior a la letra en la segunda cadena en esta posición, o si la primera cadena y la segunda cadena concuerdan en todas las posiciones, pero la segunda cadena tiene más letras.

Ejemplo 11 I

Ejemplo 11

- Este orden es el mismo que se utiliza en los diccionarios.

Ejemplo 11 II

- Por ejemplo,

$$discreet \prec discrete,$$

porque estas cadenas difieren primero en la séptima posición, y $e \prec t$.

- También,

$$discreet \prec discreetness,$$

porque las primeras ocho letras concuerdan, pero la segunda cadena es más larga.

Ejemplo 11 II

- Además,

$$discrete \prec discretion,$$

porque

$$discrete \prec discreti.$$

$\square$

Diagramas de Hasse I

- No es necesario mostrar muchas aristas en el grafo dirigido para un poset finito porque deben estar presentes.

- Por ejemplo, considere el grafo dirigido para el orden parcial $\{(a, b)|a \leq b\}$ en el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, que se muestra en la Figura 2 (a).

- Debido a que esta relación es un ordenamiento parcial, es reflexiva y su grafo dirigido tiene bucles en todos los vértices.

- En consecuencia, no tenemos que mostrar estos bucles porque deben estar presentes; en la Figura 2 (b) no se muestran los bucles.

Diagramas de Hasse I

- Ya que un ordenamiento parcial es transitivo, no tenemos que mostrar esas aristas que deben estar presentes debido a la transitividad.

- Por ejemplo, en la Figura 2 (c) las aristas (1, 3), (1, 4) y (2, 4) no se muestran porque deben estar presentes.

Diagramas de Hasse I

- Si asumimos que todos las aristas apuntan "hacia arriba"(como están dibujados en la figura), no tenemos que mostrar las direcciones de las aristas; la figura 2 (c) no muestra direcciones.

Diagramas de Hasse II

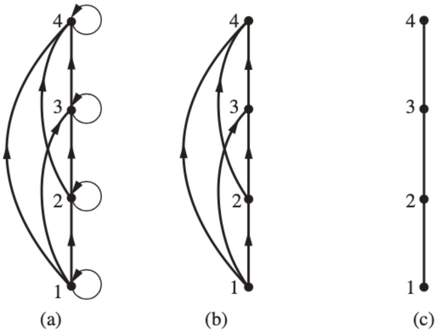

Figura 2: Construcción del diagrama de Hasse para $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$.

Diagramas de Hasse III

- En general, podemos representar un poset finito $(S, \preccurlyeq)$ usando este procedimiento: Comience con el grafo dirigido para esta relación.

- Debido a que un ordenamiento parcial es reflexivo, un bucle (a, a) está presente en cada vértice a. Elimine estos bucles.

- A continuación, elimine todas las aristas que deban estar en el orden parcial debido a la presencia de otras aristas y transitividad. Es decir, elimine todas las aristas (x, y) para las que hay un elemento $z \in S$ tal que $x \prec z$ y $z \prec y$.

Diagramas de Hasse III

- Finalmente, ordene cada arista de modo que su vértice inicial esté debajo de su vértice terminal.

Diagramas de Hasse III

- Elimine todas las flechas en las aristas dirigidas, porque todos las aristas apuntan "hacia arriba" hacia su vértice terminal.

Diagramas de Hasse IV

- Estos pasos están bien definidos y sólo es necesario realizar un número finito de pasos para un poset finito.

Diagramas de Hasse IV

- Cuando se han dado todos los pasos, el diagrama resultante contiene información suficiente para encontrar el orden parcial, como explicaremos más adelante.

Diagramas de Hasse IV

- El diagrama resultante se llama **diagrama de Hasse** de $(S, \preccurlyeq)$, y recibe su nombre del matemático alemán del siglo XX Helmut Hasse, que hizo un uso extensivo de ellos.

Diagramas de Hasse IV

- Sea $(S, \preccurlyeq)$ un poset.

Diagramas de Hasse IV

- Decimos que un elemento $y \in S$ **cubre** un elemento $x \in S$ si $x \prec y$ y no hay ningún elemento $z \in S$ tal que $x \prec z \prec y$.

Diagramas de Hasse IV

- El conjunto de pares (x, y) tal que y cubre x se llama la **relación de cobertura** de $(S, \preccurlyeq)$.

Diagramas de Hasse V

- De la descripción del diagrama de Hasse de un poset, vemos que las aristas en el diagrama de Hasse de $(S, \preccurlyeq)$ son aristas apuntando hacia arriba que corresponden a los pares en la relación de cobertura de $(S, \preccurlyeq)$.

Diagramas de Hasse V

- Además, podemos recuperar un poset de su relación de cobertura, porque es la cerradura transitiva y reflexiva de su relación de cobertura.

Diagramas de Hasse V

- Esto nos dice que podemos construir un ordenamiento parcial a partir de su diagrama de Hasse.

Ejemplo 12

Dibuje el diagrama de Hasse que representa el orden parcial $\{(a,b)|a \text{ divide } b\}$ sobre $\{1,2,3,4,6,8,12\}$.

Ejemplo 12 I

Ejemplo 12

Dibuje el diagrama de Hasse que representa el orden parcial $\{(a, b)|a \text{ divide } b\}$ sobre $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.

Solución:

- Comience con el digrafo para este orden parcial, como se muestra en la Figura 3 (a).

Ejemplo 12 I

Ejemplo 12

Dibuje el diagrama de Hasse que representa el orden parcial $\{(a, b)|a \text{ divide } b\}$ sobre $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.

Solución:

- Retire todos los bucles, como se muestra en la Figura 3 (b).

Ejemplo 12

Dibuje el diagrama de Hasse que representa el orden parcial $\{(a, b)|a \text{ divide } b\}$ sobre $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.

Solución:

- Luego elimine todas las aristas implicadas por la propiedad transitiva.

Ejemplo 12

Dibuje el diagrama de Hasse que representa el orden parcial $\{(a,b)|a \text{ divide } b\}$ sobre $\{1,2,3,4,6,8,12\}$.

Solución:

- Estas son $(1,4)$, $(1,6)$, $(1,8)$, $(1,12)$, $(2,8)$, $(2,12)$ y $(3,12)$.

Ejemplo 12

Dibuje el diagrama de Hasse que representa el orden parcial $\{(a, b)|a$ divide $b\}$ sobre $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.

Solución:

- Organice todas las aristas para que apunten hacia arriba y elimine todas las flechas para obtener el diagrama de Hasse.

Ejemplo 12

Dibuje el diagrama de Hasse que representa el orden parcial $\{(a,b)|a$ divide $b\}$ sobre $\{1,2,3,4,6,8,12\}$.

Solución:

- El diagrama de Hasse resultante se muestra en la Figura 3 (c).

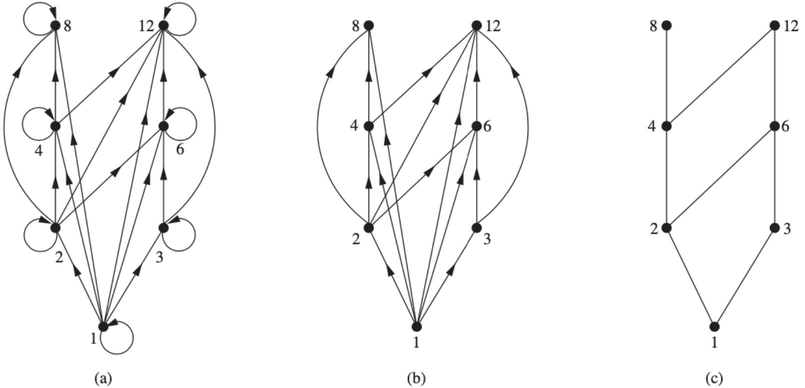

Figura 3: Construcción del diagrama de Hasse para $(\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}, |)$.

□

Ejemplo 13 I

Ejemplo 13

Dibuje el diagrama de Hasse para el orden parcial $\{(A, B) | A \subseteq B\}$ sobre el conjunto potencia $\mathcal{P}(S)$, donde $S = \{a, b, c\}$.

Ejemplo 13 I

Ejemplo 13

Dibuje el diagrama de Hasse para el orden parcial $\{(A, B)|A \subseteq B\}$ sobre el conjunto potencia $\mathcal{P}(S)$, donde $S = \{a, b, c\}$.

Solución:

- El diagrama de Hasse para este ordenamiento parcial se obtiene a partir del digrafo asociado eliminando todos los bucles y todas las aristas que se producen por la transitividad.

Ejemplo 13 I

Ejemplo 13

Dibuje el diagrama de Hasse para el orden parcial $\{(A, B)|A \subseteq B\}$ sobre el conjunto potencia $\mathcal{P}(S)$, donde $S = \{a, b, c\}$.

Solución:

- A saber, $(\emptyset, \{a, b\})$, $(\emptyset, \{a, c\})$, $(\emptyset, \{b, c\})$, $(\emptyset, \{a, b, c\})$, $(\{a\}, \{a, b, c\})$, $(\{b\}, \{a, b, c\})$ y $(\{c\}, \{a, b, c\})$.

Ejemplo 13

Dibuje el diagrama de Hasse para el orden parcial $\{(A, B)|A \subseteq B\}$ sobre el conjunto potencia $\mathcal{P}(S)$, donde $S = \{a, b, c\}$.

Solución:

- Finalmente, todas las aristas apuntan hacia arriba y las flechas se eliminan.

Ejemplo 13

Dibuje el diagrama de Hasse para el orden parcial $\{(A, B) | A \subseteq B\}$ sobre el conjunto potencia $\mathcal{P}(S)$, donde $S = \{a, b, c\}$.

Solución:

- El diagrama de Hasse resultante se ilustra en la Figura 4.

Ejemplo 13 II

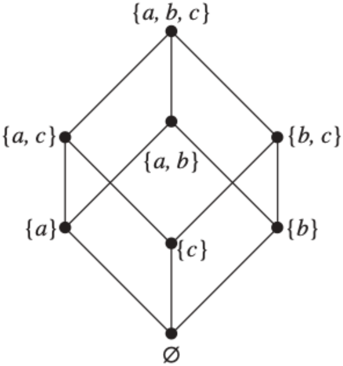

Figura 4: El diagrama de Hasse para $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$.

□

Elementos Maximales y Minimales I

- Los elementos de los posets que tienen ciertas propiedades extremas son importantes para muchas aplicaciones.

Elementos Maximales y Minimales I

- Un elemento de un poset se llama maximal si no es menor que cualquier elemento del poset. Es decir, a es **maximal** en el poset $(S, \preccurlyeq)$ si no hay $b \in S$ tal que $a \prec b$.

Elementos Maximales y Minimales I

- De manera similar, un elemento de un poset se llama minimal si no es mayor que cualquier elemento del poset.

Elementos Maximales y Minimales I

- Es decir, a es **minimal** si no hay ningún elemento $b \in S$ tal que $b \prec a$.

Elementos Maximales y Minimales I

- Los elementos maximales y minimales son fáciles de detectar mediante un diagrama de Hasse, son los elementos "superiores" e "inferiores" del diagrama.

Ejemplo 14 I

Ejemplo 14

¿Qué elementos del poset $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$ son maximales y cuáles son minimales?

Ejemplo 14

¿Qué elementos del poset $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$ son maximales y cuáles son minimales?

Solución:

- El diagrama de Hasse en la Figura 5 para este poset muestra que los elementos maximales son 12, 20 y 25, los elementos minimales son 2 y 5.

Ejemplo 14 I

Ejemplo 14

¿Qué elementos del poset $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$ son maximales y cuáles son minimales?

Solución:

- Como muestra este ejemplo, un poset puede tener más de un elemento maximal y más de un elemento minimal.

Ejemplo 14 II

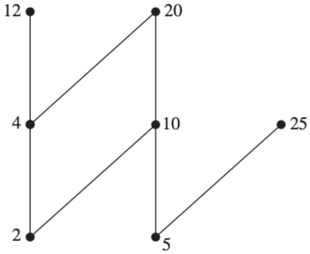

Figura 5: El diagrama de Hasse para $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$.

□

Elemento Mayor y Elemento Menor

- A veces hay un elemento en un poset que es mayor que cualquier otro elemento.

Elemento Mayor y Elemento Menor

- Tal elemento se llama el elemento más grande (mayor).

Elemento Mayor y Elemento Menor

- Es decir, a es el **elemento más grande** (**mayor**) del poset $(S, \preccurlyeq)$ si $b \preccurlyeq a$ para todo $b \in S$.

Elemento Mayor y Elemento Menor

- El elemento más grande es único cuando existe.

Elemento Mayor y Elemento Menor

- Del mismo modo, un elemento se denomina elemento más pequeño (menor) si es menor que todos los demás elementos del poset.

Elemento Mayor y Elemento Menor

- Es decir, a es el **elemento más pequeño (menor)** de $(S, \preccurlyeq)$ si $a \preccurlyeq b$ para todo $b \in S$.

- El elemento más pequeño es único cuando existe.

Ejemplo 15

Determine si los posets representados por cada uno de los diagramas de Hasse en la Figura 6 tienen un elemento mayor y un elemento menor.

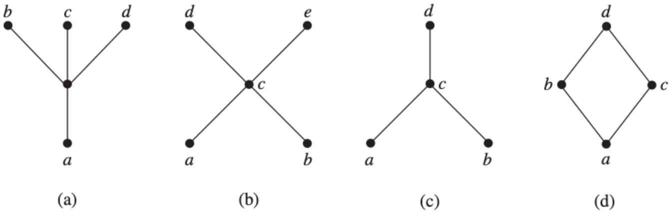

Figura 6: Diagramas de Hasse para el Ejemplo 15.

Ejemplo 15 II

Solución:

- El elemento menor del poset con diagrama de Hasse (a) es a, este poset no tiene elemento mayor.

Ejemplo 15 II

Solución:

- El poset con diagrama de Hasse (b) no tiene ni un elemento menor ni uno mayor.

Ejemplo 15 II

Solución:

- El poset con diagrama de Hasse (c) no tiene ningún elemento menor, su elemento mayor es d.

Solución:

- El poset con diagrama de Hasse (d) tiene el elemento menor a y el elemento mayor d.

$\square$

Ejemplo 16

Ejemplo 16

Sea S un conjunto. Determine si hay un elemento mayor y un elemento menor en el poset $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$.

Ejemplo 16

Ejemplo 16

Sea S un conjunto. Determine si hay un elemento mayor y un elemento menor en el poset $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$.

Solución:

- El elemento menor es el conjunto vacío, porque $\emptyset \subseteq T$ para cualquier subconjunto T de S.

Ejemplo 16

Sea S un conjunto. Determine si hay un elemento mayor y un elemento menor en el poset $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$.

Solución:

- El conjunto S es el elemento más grande en este conjunto, porque $T \subseteq S$ siempre que T es un subconjunto de S.

$\square$

Ejemplo 17

¿Hay un elemento mayor y un elemento menor en el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$?

Ejemplo 17

Ejemplo 17

¿Hay un elemento mayor y un elemento menor en el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$?

Solución:

- El número entero 1 es el elemento menor porque $1|n$ siempre que n es un número entero positivo.

Ejemplo 17

¿Hay un elemento mayor y un elemento menor en el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$?

Solución:

- Debido a que no hay un número entero que sea divisible por todos los números enteros positivos, no hay ningún elemento mayor.

$\square$

Cota Superior y Cota Inferior

- A veces es posible encontrar un elemento que sea mayor o igual que todos los elementos de un subconjunto A de un poset $(S, \preccurlyeq)$.

Cota Superior y Cota Inferior

- Si u es un elemento de S tal que $a \preccurlyeq u$ para todos los elementos $a \in A$, entonces u se llama una **cota superior** de A.

Cota Superior y Cota Inferior

- Asimismo, puede haber un elemento menor o igual que todos los elementos en A.

Cota Superior y Cota Inferior

- Si l es un elemento de S tal que $l \preccurlyeq a$ para todos los elementos $a \in A$, entonces l se llama una **cota inferior** de A.

Ejemplo 18

Encuentre las cotas inferior y superior de los subconjuntos $\{a, b, c\}$, $\{j, h\}$ y $\{a, c, d, f\}$ en el poset con el diagrama de Hasse que se muestra en la Figura 7.

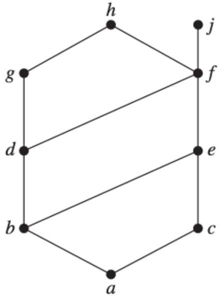

Figura 7: Diagrama de Hasse para el Ejemplo 18.

Ejemplo 18 II

Solución:

- Las cotas superiores de $\{a, b, c\}$ son e, f, j y h, y su única cota inferior es a.

Ejemplo 18 II

Solución:

- No existen cotas superiores de $\{j, h\}$ y sus cotas inferiores son a, b, c, d, e y f.

Ejemplo 18 II

Solución:

- Las cotas superiores de $\{a, c, d, f\}$ son f, h y j y su cota inferior es a.

$\square$

glb(A) y lub(A)

- El elemento x se llama la **cota superior mínima** del subconjunto A si x es una cota superior que es menor que cualquier otra cota superior de A.

glb(A) y lub(A)

- Debido a que solo hay uno de estos elementos, si existe, tiene sentido llamar a este elemento la cota superior mínima.

glb(A) y lub(A)

- Es decir, x es la cota superior mínima de A si $a \preccurlyeq x$ siempre que $a \in A$, y $x \preccurlyeq z$ siempre que z es una cota superior de A.

glb(A) y lub(A)

- De manera similar, el elemento y se llama la **cota inferior máxima** de A si y es una cota inferior de A y $z \preccurlyeq y$ siempre que z es una cota inferior de A.

glb(A) y lub(A)

- La cota inferior máxima de A es única si existe.

glb(A) y lub(A)

- La cota inferior máxima y la cota superior mínima de un subconjunto A se indican mediante glb(A) y lub(A), respectivamente.

Ejemplo 19

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de $\{b, d, g\}$, si existen, en el poset que se muestra en la Figura 7.

Ejemplo 19

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de $\{b, d, g\}$, si existen, en el poset que se muestra en la Figura 7.

Solución:

- Las cotas superiores de $\{b, d, g\}$ son g y h.

Ejemplo 19

Ejemplo 19

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de $\{b, d, g\}$, si existen, en el poset que se muestra en la Figura 7.

Solución:

- Como $g \prec h$, g es la cota superior mínima.

Ejemplo 19

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de $\{b, d, g\}$, si existen, en el poset que se muestra en la Figura 7.

Solución:

- Las cotas inferiores de $\{b, d, g\}$ son a y b.

Ejemplo 19

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de $\{b, d, g\}$, si existen, en el poset que se muestra en la Figura 7.

Solución:

- Debido a que $a \prec b$, b es la cota inferior máxima.

$\square$

Ejemplo 20

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de los conjuntos $\{3, 9, 12\}$ y $\{1, 2, 4, 5, 10\}$, si existen, en el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$.

Ejemplo 20 I

Ejemplo 20

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de los conjuntos $\{3, 9, 12\}$ y $\{1, 2, 4, 5, 10\}$, si existen, en el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$.

Solución:

- Un número entero es una cota inferior de $\{3, 9, 12\}$ si 3, 9 y 12 son divisibles por este número entero.

Ejemplo 20 I

Ejemplo 20

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de los conjuntos $\{3, 9, 12\}$ y $\{1, 2, 4, 5, 10\}$, si existen, en el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$.

Solución:

- Los únicos números enteros son 1 y 3.

Ejemplo 20

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de los conjuntos $\{3, 9, 12\}$ y $\{1, 2, 4, 5, 10\}$, si existen, en el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$.

Solución:

- Como $1|3$, 3 es cota inferior máxima de $\{3, 9, 12\}$.

Ejemplo 20

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de los conjuntos $\{3, 9, 12\}$ y $\{1, 2, 4, 5, 10\}$, si existen, en el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$.

Solución:

- La única cota inferior para el conjunto $\{1, 2, 4, 5, 10\}$ con respecto a $|$ es el elemento 1.

Ejemplo 20 I

Ejemplo 20

Encuentre la cota inferior máxima y la cota superior mínima de los conjuntos $\{3, 9, 12\}$ y $\{1, 2, 4, 5, 10\}$, si existen, en el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$.

Solución:

- Por lo tanto, 1 es la cota inferior máxima para $\{1, 2, 4, 5, 10\}$.

Ejemplo 20 II

- Un número entero es una cota superior para $\{3, 9, 12\}$ si y sólo si es divisible entre 3, 9 y 12.

Ejemplo 20 II

- Los números enteros con esta propiedad son los divisibles por el mínimo común múltiplo de 3, 9 y 12, que es 36.

Ejemplo 20 II

- Por tanto, 36 es la cota superior mínima de $\{3, 9, 12\}$.

Ejemplo 20 II

- Un entero positivo es una cota superior para el conjunto $\{1, 2, 4, 5, 10\}$ si y sólo si es divisible por 1, 2, 4, 5 y 10.

Ejemplo 20 II

- Los enteros con esta propiedad son aquellos enteros divisibles por el mínimo común múltiplo de estos enteros, que es 20.

Ejemplo 20 II

- Por tanto, 20 es la cota superior mínima de $\{1, 2, 4, 5, 10\}$. $\square$

Retículos

- Un conjunto parcialmente ordenado en el que cada par de elementos tiene tanto una cota superior mínima como una cota inferior máxima se llama **retículo**.

Retículos

- Los retículos tienen muchas propiedades especiales.

- Además, los retículos se utilizan en muchas aplicaciones diferentes, como modelos de flujo de información, y desempeñan un papel importante en el álgebra booleana.

Ejemplo 21

Determine si los posets representados por cada uno de los diagramas de Hasse en la Figura 8 son retículos.

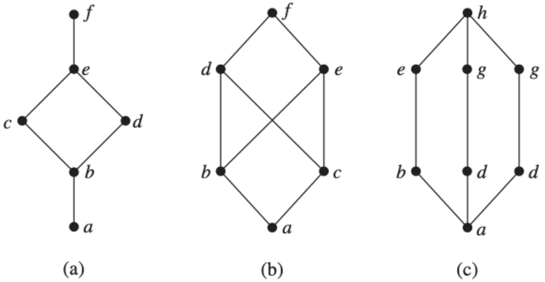

Figura 8: Diagrama de Hasse para el Ejemplo 21.

Ejemplo 21 II

Solución:

- Los posets representados por los diagramas de Hasse en (a) y (c) son retículos porque en cada poset cada par de elementos tiene una cota superior mínima y una cota inferior máxima, como el lector debe verificar.

Ejemplo 21 II

Solución:

- Por otro lado, el poset con el diagrama de Hasse que se muestra en (b) no es un retículo, porque los elementos b y c no tienen cota superior mínima.

Ejemplo 21 II

Solución:

- Para ver esto, tenga en cuenta que cada uno de los elementos d, e y f es una cota superior, pero ninguno de estos tres elementos precede a los otros dos con respecto al orden de este poset.

$\square$

Ejemplo 22

Ejemplo 22

¿Es el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$ un retículo?

Ejemplo 22

¿Es el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$ un retículo?

Solución:

- Sean a y b dos números enteros positivos.

Ejemplo 22

Ejemplo 22

¿Es el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$ un retículo?

Solución:

- La cota superior mínima y la cota inferior máxima de estos dos números enteros son el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de estos números enteros, respectivamente, como el lector debe verificar.

Ejemplo 22

¿Es el poset $(\mathbb{Z}^+, |)$ un retículo?

Solución:

- De ello se deduce que este poset es un retículo.

Ejemplo 23

Ejemplo 23

Determina si los posets $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, |)$ y $(\{1, 2, 4, 8, 16\}, |)$ son retículos.

Ejemplo 23

Determina si los posets $(\{1,2,3,4,5\},|)$ y $(\{1,2,4,8,16\},|)$ son retículos.

Solución:

- Debido a que 2 y 3 no tienen cotas superiores en $(\{1,2,3,4,5\},|)$, ciertamente no tienen una cota superior mínima.

Ejemplo 23

Determina si los posets $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, |)$ y $(\{1, 2, 4, 8, 16\}, |)$ son retículos.

Solución:

- Por tanto, el primer poset no es un retículo.

Ejemplo 23

Ejemplo 23

Determina si los posets $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, |)$ y $(\{1, 2, 4, 8, 16\}, |)$ son retículos.

Solución:

- Cada dos elementos del segundo conjunto tienen una cota superior mínima y una cota inferior máxima.

Ejemplo 23

Determina si los posets $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, |)$ y $(\{1, 2, 4, 8, 16\}, |)$ son retículos.

Solución:

- La cota superior mínima de dos elementos en este conjunto es el más grande de los elementos y la cota inferior máxima de dos elementos es el más pequeño de los elementos, como el lector debe verificar.

Ejemplo 23

Determina si los posets $(\{1,2,3,4,5\},|)$ y $(\{1,2,4,8,16\},|)$ son retículos.

Solución:

- Por tanto, este segundo poset es un retículo. $\square$

Ejemplo 24

Ejemplo 24

Determina si $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un retículo donde S es un conjunto.

Ejemplo 24

Determina si $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un retículo donde S es un conjunto.

Solución:

- Sean A y B dos subconjuntos de S.

Ejemplo 24

Ejemplo 24

Determina si $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un retículo donde S es un conjunto.

Solución:

- La cota superior mínima y la cota inferior máxima de A y B son $A \cup B$ y $A \cap B$, respectivamente, como puede mostrar el lector.

Ejemplo 24

Determina si $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un retículo donde S es un conjunto.

Solución:

- Por tanto, $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un retículo. $\square$

Ejercicios I

1. ¿Cuáles de estas relaciones sobre $\{0, 1, 2, 3\}$ son órdenes parciales? Determine las propiedades, de un orden parcial, de las que carecen las que no lo son.
    1. $(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)$.
    2. $(0,0), (1,1), (2,0), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)$.
    3. $(0,0), (1,1), (1,2), (2,2), (3,3)$.
    4. $(0,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)$.
    5. $(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,2), (3,3)$.
2. ¿Cuáles de estos son posets?
    1. $(\mathbb{Z}, =)$.
    2. $(\mathbb{Z}, \neq)$.
    3. $(\mathbb{Z}, \geq)$.
    4. $(\mathbb{Z}, \nmid)$.
3. Encuentre el orden lexicográfico de estas cadenas de letras minúsculas en inglés:
    1. *quack, quick, quicksilver, quicksand, quacking*.
    2. *open, opener, opera, operand, opened*.
    3. *zoo, zero, zoom, zoology, zoological*.

4. Dibuje un diagrama de Hasse para la divisibilidad sobre cada uno de los siguientes conjuntos:
   1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   2. $\{3, 5, 7, 11, 13, 16, 17\}$
   3. $\{2, 3, 5, 10, 11, 15, 25\}$
   4. $\{1, 3, 9, 27, 81, 243\}$

5. Dado el diagrama de Hasse de la Figura 9, realice lo siguiente:

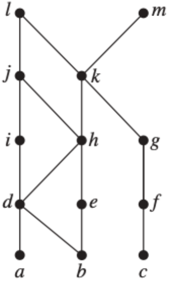

Figura 9: Diagrama de Hasse para el Ejercicio 5.

1. Encuentre los elementos maximales.
2. Encuentre los elementos minimales.
3. ¿Existe un elemento mayor?
4. ¿Existe un elemento menor?
5. Encuentre todas las cotas superiores de $\{a, b, c\}$.
6. Encuentre la mínima cota superior de $\{a, b, c\}$, si existe.
7. Encuentre todas las cotas inferiores de $\{f, g, h\}$.
8. Encuentre la máxima cota inferior de $\{f, g, h\}$, si existe.

6. Sea (S, R) un poset. Muestre que (S, R^{-1}) también es un poset, donde R^{-1} es la inversa de R. El poset (S, R^{-1}) se llama **dual** de (S, R).
7. Sea $(S, \preccurlyeq)$ un poset, demuestre que si existe el(la):
    1. elemento mayor, entonces es único.
    2. elemento menor, entonces es único.
    3. mínima cota superior, entonces es única.
    4. máxima cota inferior, entonces es única.

Ejercicios IV

8. Determine si son retículos los posets cuyos diagramas de Hasse están dados en la Figura 10.

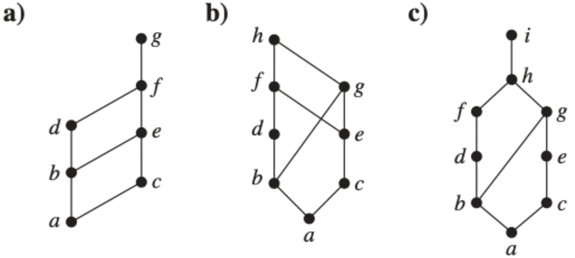

Figura 10: Diagramas de Hasse para el Ejercicio 8.