Relaciones IV

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Estructuras Discretas CCOS 009

Primavera 2021

Contenido

Motivación I

- En algunos lenguajes de programación, los nombres de las variables pueden contener un número ilimitado de caracteres.

Motivación I

- Sin embargo, existe un límite en el número de caracteres que se comprueban cuando un compilador determina si dos variables son iguales.

Motivación I

- Por ejemplo, en C tradicional, el compilador solo verifica los primeros ocho caracteres de un nombre de variable.

Motivación I

- Estos caracteres son letras mayúsculas o minúsculas, dígitos o guiones bajos.

Motivación I

- En consecuencia, el compilador considera las cadenas de más de ocho caracteres que coinciden en sus primeros ocho caracteres como iguales.

Motivación I

- Sea R la relación en el conjunto de cadenas de caracteres tal que sRt, donde s y t son dos cadenas, si s y t tienen al menos ocho caracteres de longitud y los primeros ocho caracteres de s y t concuerdan, o $s = t$.

Motivación I

- Es fácil ver que R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Motivación I

- Además, R divide el conjunto de todas las cadenas en clases, donde todas las cadenas de una clase en particular son consideradas iguales por un compilador de C.

Motivación II

- Los enteros a y b están relacionados por la relación de “congruencia módulo 4” cuando 4 divide $a - b$.

Motivación II

- Más adelante mostraremos que esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva.

Motivación II

- No es difícil ver que a está relacionado con b si y sólo si a y b tienen el mismo resto cuando se dividen por 4.

Motivación II

- De ello se deduce que esta relación divide el conjunto de números enteros en cuatro clases diferentes.

Motivación II

- Cuando sólo nos importa el resto que deja un entero cuando se divide entre 4, sólo necesitamos saber en qué clase está, no su valor particular.

Motivación III

- Estas dos relaciones, R y congruencia módulo 4, son ejemplos de relaciones de equivalencia, es decir, relaciones reflexivas, simétricas y transitivas.

Motivación III

- En esta sección mostraremos que tales relaciones dividen conjuntos en clases disjuntas de elementos equivalentes.

Motivación III

- Las relaciones de equivalencia surgen siempre que nos preocupemos sólo de si un elemento de un conjunto pertenece a una determinada clase de elementos, en lugar de preocuparnos por su identidad particular.

Relaciones de Equivalencia I

- En esta sección estudiaremos relaciones con una combinación particular de propiedades que les permite ser utilizadas para relacionar objetos que son similares de alguna manera.

Definición 1

Una relación sobre un conjunto A se llama *relación de equivalencia* si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Relaciones de Equivalencia II

- Las relaciones de equivalencia son importantes en matemáticas y ciencias de la computación.

Relaciones de Equivalencia II

- Una razón de esto es que en una relación de equivalencia, cuando dos elementos están relacionados, tiene sentido decir que son equivalentes.

Relaciones de Equivalencia II

Definición 2

Dos elementos a y b que están relacionados por una relación de equivalencia se denominan *equivalentes*. La notación $a \sim b$ se usa a menudo para denotar que a y b son elementos equivalentes con respecto a una relación de equivalencia particular.

Relaciones de Equivalencia III

- Para que la noción de elementos equivalentes tenga sentido, cada elemento debe ser equivalente a sí mismo, ya que la propiedad reflexiva garantiza una relación de equivalencia.

Relaciones de Equivalencia III

- Tiene sentido decir que a y b están relacionados (no sólo que a está relacionado con b) por una relación de equivalencia, porque cuando a está relacionado con b, por la propiedad simétrica, b está relacionado con a.

Relaciones de Equivalencia III

- Además, debido a que una relación de equivalencia es transitiva, si a y b son equivalentes y b y c son equivalentes, se deduce que a y c son equivalentes.

Ejemplo 1

Ejemplo 1

Sea R la relación sobre el conjunto de enteros tal que aRb si y sólo si $a = b$ o $a = -b$. En una sesión anterior mostramos que R es reflexiva, simétrica y transitiva. De ello se deduce que R es una relación de equivalencia. $\square$

Ejemplo 2

Sea R la relación sobre el conjunto de números reales tal que aRb si y sólo si $a - b$ es un número entero. ¿Es R una relación de equivalencia?

Solución:

Ejemplo 2

Sea R la relación sobre el conjunto de números reales tal que aRb si y sólo si $a - b$ es un número entero. ¿Es R una relación de equivalencia?

Solución:

- Como $a - a = 0$ es un número entero para todos los números reales a, aRa para todos los números reales a. Por tanto, R es reflexiva.

Ejemplo 2

Sea R la relación sobre el conjunto de números reales tal que aRb si y sólo si $a - b$ es un número entero. ¿Es R una relación de equivalencia?

Solución:

- Ahora suponga que aRb. Entonces $a - b$ es un número entero, así que $b - a$ también es un número entero. Por lo tanto, bRa. De ello se deduce que R es simétrica.

Ejemplo 2

Sea R la relación sobre el conjunto de números reales tal que aRb si y sólo si $a - b$ es un número entero. ¿Es R una relación de equivalencia?

Solución:

- Si aRb y bRc, entonces $a - b$ y $b - c$ son números enteros. Por lo tanto, $a - c = (a - b) + (b - c)$ también es un número entero. Por lo tanto, aRc. Por tanto, R es transitiva.

Ejemplo 2

Sea R la relación sobre el conjunto de números reales tal que aRb si y sólo si $a - b$ es un número entero. ¿Es R una relación de equivalencia?

Solución:

- En consecuencia, R es una relación de equivalencia. $\square$

Ejemplo 3 I

Ejemplo 3

Congruencia Módulo m. Sea m un número entero tal que $m > 1$. Demuestre que la relación

$$R = \{(a, b) | a \equiv b \pmod{m}\}$$

es una relación de equivalencia sobre el conjunto de números enteros.

Solución:

Ejemplo 3

Congruencia Módulo $\boldsymbol{m}$. Sea m un número entero tal que $m > 1$. Demuestre que la relación

$$R = \{(a, b) | a \equiv b \pmod{m}\}$$

es una relación de equivalencia sobre el conjunto de números enteros.

Solución:

- Recuerde que $a \equiv b \pmod{m}$ si y sólo si m divide $a - b$.

Ejemplo 3

Congruencia Módulo m. Sea m un número entero tal que $m > 1$. Demuestre que la relación

$$R = \{(a, b) | a \equiv b \pmod{m}\}$$

es una relación de equivalencia sobre el conjunto de números enteros.

Solución:

- Tenga en cuenta que $a - a = 0$ es divisible entre m, porque $0 = 0 \cdot m$.

Ejemplo 3

Congruencia Módulo m. Sea m un número entero tal que $m > 1$. Demuestre que la relación

$$R = \{(a, b) | a \equiv b \pmod{m}\}$$

es una relación de equivalencia sobre el conjunto de números enteros.

Solución:

- Por tanto, $a \equiv a \pmod{m}$, por lo que la congruencia módulo m es reflexiva.

Ejemplo 3 II

- Ahora suponga que $a \equiv b \pmod{m}$.

Ejemplo 3 II

- Entonces $a - b$ es divisible por m, entonces $a - b = km$, donde k es un número entero.

Ejemplo 3 II

- Entonces $a - b$ es divisible por m, entonces $a - b = km$, donde k es un número entero.
- De ello se deduce que $b - a = (-k)m$, entonces $b \equiv a \pmod{m}$.

Ejemplo 3 II

- Por tanto, la congruencia módulo m es simétrica.

Ejemplo 3 II

- A continuación, suponga que $a \equiv b \pmod{m}$ y $b \equiv c \pmod{m}$.

Ejemplo 3 II

- A continuación, suponga que $a \equiv b \pmod{m}$ y $b \equiv c \pmod{m}$.
- Entonces m divide tanto $a - b$ como $b - c$.

Ejemplo 3 II

- A continuación, suponga que $a \equiv b \pmod{m}$ y $b \equiv c \pmod{m}$.
- Entonces m divide tanto $a - b$ como $b - c$.
- Por tanto, hay enteros k y l con $a - b = km$ y $b - c = lm$.

Ejemplo 3 II

- A continuación, suponga que $a \equiv b \pmod{m}$ y $b \equiv c \pmod{m}$.
- Entonces m divide tanto $a - b$ como $b - c$.
- Por tanto, hay enteros k y l con $a - b = km$ y $b - c = lm$.
- La suma de estas dos ecuaciones muestra que $a - c = (a - b) + (b - c) = km + lm = (k + l)m$.

Ejemplo 3 II

- A continuación, suponga que $a \equiv b \pmod{m}$ y $b \equiv c \pmod{m}$.
- Entonces m divide tanto $a - b$ como $b - c$.
- Por tanto, hay enteros k y l con $a - b = km$ y $b - c = lm$.
- La suma de estas dos ecuaciones muestra que $a - c = (a - b) + (b - c) = km + lm = (k + l)m$.
- Por lo tanto, $a \equiv c \pmod{m}$.

Ejemplo 3 II

- De este modo, la congruencia módulo m es transitiva.

Ejemplo 3 II

- De ello se deduce que la congruencia módulo m es una relación de equivalencia. $\square$

Ejemplo 4

Suponga que R es la relación sobre el conjunto de cadenas de letras del alfabeto inglés tal que aRb si y sólo si $l(a) = l(b)$, donde $l(x)$ es la longitud de la cadena x. ¿Es R una relación de equivalencia?

Solución:

Ejemplo 4

Suponga que R es la relación sobre el conjunto de cadenas de letras del alfabeto inglés tal que aRb si y sólo si $l(a) = l(b)$, donde $l(x)$ es la longitud de la cadena x. ¿Es R una relación de equivalencia?

Solución:

- Como $l(a) = l(a)$, se deduce que aRa siempre que a es una cadena, de modo que R es reflexiva.

Ejemplo 4 I

Ejemplo 4

Suponga que R es la relación sobre el conjunto de cadenas de letras del alfabeto inglés tal que aRb si y sólo si $l(a) = l(b)$, donde $l(x)$ es la longitud de la cadena x. ¿Es R una relación de equivalencia?

Solución:

- A continuación, suponga que aRb, de modo que $l(a) = l(b)$.

Ejemplo 4 I

Ejemplo 4

Suponga que R es la relación sobre el conjunto de cadenas de letras del alfabeto inglés tal que aRb si y sólo si $l(a) = l(b)$, donde $l(x)$ es la longitud de la cadena x. ¿Es R una relación de equivalencia?

Solución:

- A continuación, suponga que aRb, de modo que $l(a) = l(b)$.
- Entonces bRa, porque $l(b) = l(a)$.

Ejemplo 4 I

Ejemplo 4

Suponga que R es la relación sobre el conjunto de cadenas de letras del alfabeto inglés tal que aRb si y sólo si $l(a) = l(b)$, donde $l(x)$ es la longitud de la cadena x. ¿Es R una relación de equivalencia?

Solución:

- Por tanto, R es simétrica.

Ejemplo 4 II

- Finalmente, suponga que aRb y bRc.

Ejemplo 4 II

- Entonces $l(a) = l(b)$ y $l(b) = l(c)$.

Ejemplo 4 II

- Entonces $l(a) = l(b)$ y $l(b) = l(c)$.
- Por tanto, $l(a) = l(c)$, entonces aRc.

Ejemplo 4 II

- En consecuencia, R es transitiva.

Ejemplo 4 II

- Como R es reflexiva, simétrica y transitiva entonces es una relación de equivalencia. $\square$

Ejemplo 5 I

Ejemplo 5

- Sean n un entero positivo y S un conjunto de cadenas.

Ejemplo 5

- Sean n un entero positivo y S un conjunto de cadenas.
- Suponga que R_n es la relación sobre S tal que sR_nt si y sólo si $s = t$, o ambos s y t tienen al menos n caracteres y los primeros n caracteres de s y t son iguales.

Ejemplo 5 I

Ejemplo 5

- Sean n un entero positivo y S un conjunto de cadenas.
- Suponga que R_n es la relación sobre S tal que sR_nt si y sólo si $s = t$, o ambos s y t tienen al menos n caracteres y los primeros n caracteres de s y t son iguales.
- Es decir, una cadena de menos de n caracteres está relacionada sólo consigo misma; una cadena s con al menos n caracteres está relacionada con una cadena t si y sólo si t tiene al menos n caracteres y t comienza con los n caracteres iniciales de s.

Ejemplo 5 I

Ejemplo 5

- Por ejemplo, sea $n = 3$ y sea S el conjunto de todas las cadenas de bits.

Ejemplo 5

- Por ejemplo, sea $n = 3$ y sea S el conjunto de todas las cadenas de bits.
- Entonces sR_3t cuando $s = t$ o tanto s como t son cadenas de bits de longitud 3 o más que comienzan con los mismos tres bits.

Ejemplo 5

- Por ejemplo, sea $n = 3$ y sea S el conjunto de todas las cadenas de bits.
- Entonces sR_3t cuando $s = t$ o tanto s como t son cadenas de bits de longitud 3 o más que comienzan con los mismos tres bits.
- Por ejemplo, $01R_301$ y $00111R_300101$, pero $01\not R_3010$ y $01011\not R_301110$.

Ejemplo 5 II

Demuestre que para cada conjunto S de cadenas y cada entero positivo n, R_n es una relación de equivalencia sobre S.

Solución:

Demuestre que para cada conjunto S de cadenas y cada entero positivo n, R_n es una relación de equivalencia sobre S.
Solución:

- La relación R_n es reflexiva porque $s = s$, de modo que sR_ns siempre que s es una cadena en S.

Ejemplo 5 II

Demuestre que para cada conjunto S de cadenas y cada entero positivo n, R_n es una relación de equivalencia sobre S.
Solución:

- Si sR_nt, entonces $s = t$ o s y t tienen al menos n caracteres de longitud que comienzan con los mismos n caracteres.

Demuestre que para cada conjunto S de cadenas y cada entero positivo n, R_n es una relación de equivalencia sobre S.
Solución:

- Esto significa que tR_ns.

Ejemplo 5 II

Demuestre que para cada conjunto S de cadenas y cada entero positivo n, R_n es una relación de equivalencia sobre S.
Solución:

- Concluimos que R_n es simétrica.

Ejemplo 5 III

- Ahora suponga que sR_nt y tR_nu.

Ejemplo 5 III

- Ahora suponga que sR_nt y tR_nu.
- Entonces, $s = t$ o s y t tienen al menos n caracteres de longitud y s y t comienzan con los mismos n caracteres, y $t = u$ o t y u tienen al menos n caracteres de longitud y t y u comienzan con los mismos n caracteres.

Ejemplo 5 III

- Ahora suponga que sR_nt y tR_nu.
- Entonces, $s = t$ o s y t tienen al menos n caracteres de longitud y s y t comienzan con los mismos n caracteres, y $t = u$ o t y u tienen al menos n caracteres de longitud y t y u comienzan con los mismos n caracteres.
- A partir de esto, podemos deducir que $s = u$ o ambos s y u tienen n caracteres de longitud y s y u comienzan con los mismos n caracteres (porque en este caso sabemos que s, t y u tienen al menos n caracteres de longitud y tanto s como u comienzan con los mismos n caracteres que t).

Ejemplo 5 III

- En consecuencia, R_n es transitiva.

Ejemplo 5 III

- De ello se deduce que R_n es una relación de equivalencia. $\square$

Ejemplo 6

Muestre que la relación "divide" sobre el conjunto de enteros positivos no es una relación de equivalencia.

Solución:

Ejemplo 6

Muestre que la relación "divide" sobre el conjunto de enteros positivos no es una relación de equivalencia.

Solución:

- Por los ejemplos 45 y 51 de la sección 2.1 (ver notas del curso), sabemos que la relación "divide" es reflexiva y transitiva.

Ejemplo 6

Ejemplo 6

Muestre que la relación "divide" sobre el conjunto de enteros positivos no es una relación de equivalencia.

Solución:

- Sin embargo, por el ejemplo 48 de la sección 2.1 (ver notas del curso), sabemos que esta relación no es simétrica (por ejemplo, $2|4$ pero $4 \nmid 2$).

Ejemplo 6

Ejemplo 6

Muestre que la relación "divide" sobre el conjunto de enteros positivos no es una relación de equivalencia.

Solución:

- Concluimos que la relación "divide" en el conjunto de enteros positivos no es una relación de equivalencia. $\square$

Ejemplo 7

Sea R la relación sobre el conjunto de números reales tal que xRy si y sólo si x y y son números reales que difieren en menos de 1, es decir, $|x - y| < 1$. Muestre que R no es una relación de equivalencia.

Solución:

Ejemplo 7

Sea R la relación sobre el conjunto de números reales tal que xRy si y sólo si x y y son números reales que difieren en menos de 1, es decir, $|x - y| < 1$. Muestre que R no es una relación de equivalencia.

Solución:

- R es reflexiva porque $|x - x| = 0 < 1$ siempre que $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 7

Sea R la relación sobre el conjunto de números reales tal que xRy si y sólo si x y y son números reales que difieren en menos de 1, es decir, $|x - y| < 1$. Muestre que R no es una relación de equivalencia.

Solución:

- R es simétrica, porque si xRy, donde x y y son números reales, entonces $|x - y| < 1$, lo que nos dice que $|y - x| = |x - y| < 1$, de modo que yRx.

Ejemplo 7

Sea R la relación sobre el conjunto de números reales tal que xRy si y sólo si x y y son números reales que difieren en menos de 1, es decir, $|x - y| < 1$. Muestre que R no es una relación de equivalencia.

Solución:

- Sin embargo, R no es una relación de equivalencia porque no es transitiva.

Ejemplo 7

Sea R la relación sobre el conjunto de números reales tal que xRy si y sólo si x y y son números reales que difieren en menos de 1, es decir, $|x - y| < 1$. Muestre que R no es una relación de equivalencia.

Solución:

- Tome $x = 2.8$, $y = 1.9$ y $z = 1.1$, de modo que $|x - y| = |2.8 - 1.9| = 0.9 < 1$, $|y - z| = |1.9 - 1.1| = 0.8 < 1$, pero $|x - z| = |2.8 - 1.1| = 1.7 > 1$.

Ejemplo 7

Sea R la relación sobre el conjunto de números reales tal que xRy si y sólo si x y y son números reales que difieren en menos de 1, es decir, $|x - y| < 1$. Muestre que R no es una relación de equivalencia.

Solución:

- Tome $x = 2.8$, $y = 1.9$ y $z = 1.1$, de modo que $|x - y| = |2.8 - 1.9| = 0.9 < 1$, $|y - z| = |1.9 - 1.1| = 0.8 < 1$, pero $|x - z| = |2.8 - 1.1| = 1.7 > 1$.
- Es decir, $2.8R1.9$, $1.9R1.1$, pero $2.8\not R1.1$.

$\square$

1. Sea A el conjunto de todos los estudiantes de su escuela que se graduaron de la escuela secundaria.
2. Considere la relación R sobre A que consta de todos los pares (x, y), donde x y y se graduaron de la misma escuela secundaria.
3. Dado un estudiante x, podemos formar el conjunto de todos los estudiantes equivalentes a x con respecto a R.
4. Este conjunto consta de todos los estudiantes que se graduaron de la misma escuela secundaria que x.
5. Este subconjunto de A se denomina clase de equivalencia de la relación.

Clases de Equivalencia II

Definición 3

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. El conjunto de todos los elementos que están relacionados con un elemento a de A se denomina la *clase de equivalencia* de a. La clase de equivalencia de a con respecto a R se denota por $[a]_R$. Cuando sólo se está considerando una relación, podemos eliminar el subíndice R y escribir $[a]$ para esta clase de equivalencia.

Clases de Equivalencia III

- En otras palabras, si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto A, la clase de equivalencia del elemento a es

$$[a]_R = \{s|(a,s) \in R\}.$$

Clases de Equivalencia III

- Si $b \in [a]_R$, entonces b se denomina **representante** de esta clase de equivalencia.

Clases de Equivalencia III

- Cualquier elemento de una clase se puede utilizar como representante de esta clase.

Clases de Equivalencia III

- Es decir, no hay nada especial en el elemento particular elegido como representante de la clase.

Ejemplo 8

Ejemplo 8

¿Cuál es la clase de equivalencia de un número entero para la relación de equivalencia aRb si y sólo si $a = b$ o $a = -b$?

Solución:

Ejemplo 8

Ejemplo 8

¿Cuál es la clase de equivalencia de un número entero para la relación de equivalencia aRb si y sólo si $a = b$ o $a = -b$?

Solución:

- Dado que un número entero es equivalente a sí mismo y su negativo en esta relación de equivalencia, se sigue que $[a] = \{a, -a\}$.

Ejemplo 8

Ejemplo 8

¿Cuál es la clase de equivalencia de un número entero para la relación de equivalencia aRb si y sólo si $a = b$ o $a = -b$?

Solución:

- Dado que un número entero es equivalente a sí mismo y su negativo en esta relación de equivalencia, se sigue que $[a] = \{a, -a\}$.
- Este conjunto contiene dos números enteros distintos a menos que $a = 0$.

Ejemplo 8

Ejemplo 8

¿Cuál es la clase de equivalencia de un número entero para la relación de equivalencia aRb si y sólo si $a = b$ o $a = -b$?

Solución:

- Dado que un número entero es equivalente a sí mismo y su negativo en esta relación de equivalencia, se sigue que $[a] = \{a, -a\}$.
- Este conjunto contiene dos números enteros distintos a menos que $a = 0$.
- Por ejemplo, $[7] = \{7, -7\}$, $[-5] = \{-5, 5\}$ y $[0] = \{0\}$. □

Ejemplo 9

¿Cuáles son las clases de equivalencia de 0, 1, 2 y 3 para la congruencia módulo 4?

Solución:

Ejemplo 9 I

Ejemplo 9

¿Cuáles son las clases de equivalencia de 0, 1, 2 y 3 para la congruencia módulo 4?

Solución:

- La clase de equivalencia de 0 contiene todos los enteros a tales que $a \equiv 0 \pmod 4$.

Ejemplo 9

¿Cuáles son las clases de equivalencia de 0, 1, 2 y 3 para la congruencia módulo 4?

Solución:

- La clase de equivalencia de 0 contiene todos los enteros a tales que $a \equiv 0 \pmod{4}$.
- Los números enteros de esta clase son los divisibles por 4.

Ejemplo 9

¿Cuáles son las clases de equivalencia de 0, 1, 2 y 3 para la congruencia módulo 4?

Solución:

- La clase de equivalencia de 0 contiene todos los enteros a tales que $a \equiv 0 \pmod{4}$.
- Los números enteros de esta clase son los divisibles por 4.
- Por tanto, la clase de equivalencia de 0 para esta relación es
$$[0] = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}.$$

Ejemplo 9 I

Ejemplo 9

¿Cuáles son las clases de equivalencia de 0, 1, 2 y 3 para la congruencia módulo 4?

Solución:

- La clase de equivalencia de 1 contiene todos los enteros a tales que $a \equiv 1 \pmod{4}$.

Ejemplo 9 I

Ejemplo 9

¿Cuáles son las clases de equivalencia de 0, 1, 2 y 3 para la congruencia módulo 4?

Solución:

- La clase de equivalencia de 1 contiene todos los enteros a tales que $a \equiv 1 \pmod{4}$.
- Los enteros en esta clase son aquellos que tienen un resto de 1 cuando se dividen por 4.

Ejemplo 9 I

Ejemplo 9

¿Cuáles son las clases de equivalencia de 0, 1, 2 y 3 para la congruencia módulo 4?

Solución:

- La clase de equivalencia de 1 contiene todos los enteros a tales que $a \equiv 1 \pmod 4$.
- Los enteros en esta clase son aquellos que tienen un resto de 1 cuando se dividen por 4.
- Por lo tanto, la clase de equivalencia de 1 para esta relación es

$$[1] = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}.$$

Ejemplo 9 II

- La clase de equivalencia de 2 contiene todos los enteros a tales que $a \equiv 2 \pmod 4$.

Ejemplo 9 II

- La clase de equivalencia de 2 contiene todos los enteros a tales que $a \equiv 2 \pmod 4$.
- Los enteros en esta clase son aquellos que tienen un resto de 2 cuando se dividen por 4.

Ejemplo 9 II

- La clase de equivalencia de 2 contiene todos los enteros a tales que $a \equiv 2 \pmod{4}$.
- Los enteros en esta clase son aquellos que tienen un resto de 2 cuando se dividen por 4.
- Por lo tanto, la clase de equivalencia de 2 para esta relación es

$$[2] = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}.$$

Ejemplo 9 II

- La clase de equivalencia de 3 contiene todos los enteros a tales que $a \equiv 3 \pmod{4}$.

Ejemplo 9 II

- La clase de equivalencia de 3 contiene todos los enteros a tales que $a \equiv 3 \pmod{4}$.
- Los enteros en esta clase son aquellos que tienen un resto de 3 cuando se dividen por 4.

Ejemplo 9 II

- La clase de equivalencia de 3 contiene todos los enteros a tales que $a \equiv 3 \pmod 4$.
- Los enteros en esta clase son aquellos que tienen un resto de 3 cuando se dividen por 4.
- Por lo tanto, la clase de equivalencia de 3 para esta relación es

$$[3] = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}.$$

Ejemplo 9 II

- Tenga en cuenta que cada entero está en exactamente una de las cuatro clases de equivalencia y que el entero n está en la clase que contiene $n \bmod 4$.

$\square$

Clases de Congruencia módulo m I

- En el Ejemplo 9 se encontraron las clases de equivalencia de 0, 1, 2 y 3 con respecto a la congruencia módulo 4.

Clases de Congruencia módulo m I

- El ejemplo 9 se puede generalizar fácilmente, reemplazando 4 con cualquier entero positivo m.

Clases de Congruencia módulo m I

- Las clases de equivalencia de la relación congruencia módulo m se denominan **clases de congruencia módulo** m.

Clases de Congruencia módulo m I

- La clase de congruencia de un entero a módulo m se denota por $[a]_m$, entonces

$$[a]_m = \{\dots, a-2m, a-m, a, a+m, a+2m, \dots\}.$$

Clases de Congruencia módulo m I

- Por ejemplo, del ejemplo 9 tenemos

$$
\begin{aligned}
[0]_4 &= \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\},\\
[1]_4 &= \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\},\\
[2]_4 &= \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\},\\
[3]_4 &= \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 10

¿Cuál es la clase de equivalencia de la cadena 0111 con respecto a la relación de equivalencia R_3 del ejemplo 5 sobre el conjunto de todas las cadenas de bits? (Recuerde que sR_3t si y sólo si s y t son cadenas de bits con $s = t$ o s y t son cadenas de al menos tres bits que comienzan con los mismos tres bits).

Solución:

Ejemplo 10

Ejemplo 10

¿Cuál es la clase de equivalencia de la cadena 0111 con respecto a la relación de equivalencia R_3 del ejemplo 5 sobre el conjunto de todas las cadenas de bits? (Recuerde que sR_3t si y sólo si s y t son cadenas de bits con $s = t$ o s y t son cadenas de al menos tres bits que comienzan con los mismos tres bits).

Solución:

- Las cadenas de bits equivalentes a 0111 son las cadenas de bits con al menos tres bits que comienzan con 011.

Ejemplo 10

¿Cuál es la clase de equivalencia de la cadena 0111 con respecto a la relación de equivalencia R_3 del ejemplo 5 sobre el conjunto de todas las cadenas de bits? (Recuerde que sR_3t si y sólo si s y t son cadenas de bits con $s = t$ o s y t son cadenas de al menos tres bits que comienzan con los mismos tres bits).

Solución:

- Las cadenas de bits equivalentes a 0111 son las cadenas de bits con al menos tres bits que comienzan con 011.
- Estas son las cadenas de bits 011, 0110, 0111, 01100, 01101, 01110, 01111, etc.

Ejemplo 10

¿Cuál es la clase de equivalencia de la cadena 0111 con respecto a la relación de equivalencia R_3 del ejemplo 5 sobre el conjunto de todas las cadenas de bits? (Recuerde que sR_3t si y sólo si s y t son cadenas de bits con $s = t$ o s y t son cadenas de al menos tres bits que comienzan con los mismos tres bits).

Solución:

- Las cadenas de bits equivalentes a 0111 son las cadenas de bits con al menos tres bits que comienzan con 011.
- Estas son las cadenas de bits 011, 0110, 0111, 01100, 01101, 01110, 01111, etc.
- Por consiguiente,

$$[011]_{R_3} = \{011, 0110, 0111, 01100, 01101, 01110, 01111, \ldots\}.$$

Clases de Equivalencia y Particiones I

- Sea A el conjunto de estudiantes de su escuela que se especializan en exactamente una disciplina, y sea R la relación sobre A que consta de pares (x, y), donde x y y son estudiantes con la misma especialización.

Clases de Equivalencia y Particiones I

- Entonces R es una relación de equivalencia, como debe verificar el lector.

Clases de Equivalencia y Particiones I

- Podemos ver que R divide a todos los estudiantes en A en una colección de subconjuntos disjuntos, donde cada subconjunto contiene estudiantes con una especialización específica.

Clases de Equivalencia y Particiones II

- Por ejemplo, un subconjunto contiene a todos los estudiantes que se especializan (sólo) en ciencias de la computación, y un segundo subconjunto contiene a todos los estudiantes que se especializan en historia.

Clases de Equivalencia y Particiones II

- Además, estos subconjuntos son clases de equivalencia de R.

Clases de Equivalencia y Particiones II

- Este ejemplo ilustra cómo las clases de equivalencia de una relación de equivalencia dividen un conjunto en subconjuntos disjuntos no vacíos.

Clases de Equivalencia y Particiones II

- Precisaremos estas nociones en la siguiente discusión.

Clases de Equivalencia y Particiones II

- Sea R una relación sobre el conjunto A.

Clases de Equivalencia y Particiones II

- El Teorema 1 muestra que las clases de equivalencia de dos elementos de A son idénticas o disjuntas.

Clases de Equivalencia y Particiones III

Teorema 1

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Estos enunciados para los elementos a y b de A son equivalentes:

1. aRb
2. $[a] = [b]$
3. $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Demostración:

Clases de Equivalencia y Particiones III

Teorema 1

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Estos enunciados para los elementos a y b de A son equivalentes:

1. aRb
2. $[a] = [b]$
3. $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Demostración:

$1 \rightarrow 2$ Asuma que aRb. Demostraremos que $[a] = [b]$ mostrando $[a] \subseteq [b]$ y $[b] \subseteq [a]$.

Clases de Equivalencia y Particiones III

Teorema 1

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Estos enunciados para los elementos a y b de A son equivalentes:

1. aRb
2. $[a] = [b]$
3. $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Demostración:

$1 \rightarrow 2$ Asuma que aRb. Demostraremos que $[a] = [b]$ mostrando $[a] \subseteq [b]$ y $[b] \subseteq [a]$.

- Suponga $c \in [a]$. Entonces aRc.

Teorema 1

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Estos enunciados para los elementos a y b de A son equivalentes:

1. aRb
2. $[a] = [b]$
3. $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Demostración:

$1 \rightarrow 2$ Asuma que aRb. Demostraremos que $[a] = [b]$ mostrando $[a] \subseteq [b]$ y $[b] \subseteq [a]$.

- Suponga $c \in [a]$. Entonces aRc.
- Como aRb y R es simétrica, sabemos que bRa.

Clases de Equivalencia y Particiones III

Teorema 1

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Estos enunciados para los elementos a y b de A son equivalentes:

1. aRb
2. $[a] = [b]$
3. $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Demostración:

$1 \rightarrow 2$ Asuma que aRb. Demostraremos que $[a] = [b]$ mostrando $[a] \subseteq [b]$ y $[b] \subseteq [a]$.

- Suponga $c \in [a]$. Entonces aRc.
- Como aRb y R es simétrica, sabemos que bRa.
- Además, debido a que R es transitiva y bRa y aRc, se sigue que bRc.

Teorema 1

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Estos enunciados para los elementos a y b de A son equivalentes:

1. aRb
2. $[a] = [b]$
3. $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Demostración:

1 $\rightarrow$ 2 Asuma que aRb. Demostraremos que $[a] = [b]$ mostrando $[a] \subseteq [b]$ y $[b] \subseteq [a]$.

- Suponga $c \in [a]$. Entonces aRc.
- Como aRb y R es simétrica, sabemos que bRa.
- Además, debido a que R es transitiva y bRa y aRc, se sigue que bRc.
- Por tanto, $c \in [b]$.

Teorema 1

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Estos enunciados para los elementos a y b de A son equivalentes:

1. aRb
2. $[a] = [b]$
3. $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Demostración:

1 $\rightarrow$ 2 Asuma que aRb. Demostraremos que $[a] = [b]$ mostrando $[a] \subseteq [b]$ y $[b] \subseteq [a]$.

- Suponga $c \in [a]$. Entonces aRc.
- Como aRb y R es simétrica, sabemos que bRa.
- Además, debido a que R es transitiva y bRa y aRc, se sigue que bRc.
- Por tanto, $c \in [b]$.
- Esto muestra que $[a] \subseteq [b]$.

Teorema 1

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Estos enunciados para los elementos a y b de A son equivalentes:

1. aRb
2. $[a] = [b]$
3. $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Demostración:

$1 \to 2$ Asuma que aRb. Demostraremos que $[a] = [b]$ mostrando $[a] \subseteq [b]$ y $[b] \subseteq [a]$.

- Suponga $c \in [a]$. Entonces aRc.
- Como aRb y R es simétrica, sabemos que bRa.
- Además, debido a que R es transitiva y bRa y aRc, se sigue que bRc.
- Por tanto, $c \in [b]$.
- Esto muestra que $[a] \subseteq [b]$.
- La prueba de que $[b] \subseteq [a]$ es similar y se deja como ejercicio para el lector.

$2 \to 3$

- Suponga que $[a] = [b]$.

Clases de Equivalencia y Particiones IV

$2 \rightarrow 3$

- Suponga que $[a] = [b]$.
- De ello se deduce que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ porque $[a]$ no está vacía (porque $a \in [a]$ y R es reflexiva).

Clases de Equivalencia y Particiones IV

$3 \to 1$

- Suponga que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

Clases de Equivalencia y Particiones IV

$3 \to 1$

- Suponga que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.
- Entonces hay un elemento c con $c \in [a]$ y $c \in [b]$.

$3 \to 1$

- Suponga que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.
- Entonces hay un elemento c con $c \in [a]$ y $c \in [b]$.
- En otras palabras, aRc y bRc.

Clases de Equivalencia y Particiones IV

$3 \rightarrow 1$

- Suponga que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.
- Entonces hay un elemento c con $c \in [a]$ y $c \in [b]$.
- En otras palabras, aRc y bRc.
- Por la propiedad simétrica, cRb.

$3 \to 1$

- Suponga que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.
- Entonces hay un elemento c con $c \in [a]$ y $c \in [b]$.
- En otras palabras, aRc y bRc.
- Por la propiedad simétrica, cRb.
- Luego, por transitividad, ya que aRc y cRb, tenemos aRb.

Clases de Equivalencia y Particiones IV

Ya que $1 \to 2$, $2 \to 3$ y $3 \to 1$, los tres enunciados son equivalentes. ■

Clases de Equivalencia y Particiones IV

- Ahora estamos en condiciones de mostrar cómo una relación de equivalencia *particiona* un conjunto.

- Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A.

- La unión de las clases de equivalencia de R es todo A, porque un elemento a de A está en su propia clase de equivalencia, a saber, $[a]_R$.

Clases de Equivalencia y Particiones IV

- En otras palabras,

$$\bigcup_{a \in A} [a]_R = A.$$

Clases de Equivalencia y Particiones IV

- Además, del Teorema 1 se deduce que estas clases de equivalencia son iguales o disjuntas, por lo que

$$[a]_R \cap [b]_R = \emptyset,$$

cuando $[a]_R \neq [b]_R$.

Clases de Equivalencia y Particiones V

- Estas dos observaciones muestran que las clases de equivalencia forman una partición de A, porque dividen A en subconjuntos disjuntos.

- Más precisamente, una **partición** sobre un conjunto S es una colección de subconjuntos no vacíos disjuntos de S que tienen S como su unión.

- En otras palabras, la colección de subconjuntos $A_i, i \in I$ (donde I es un conjunto de índices) forma una partición de S si y sólo si

$$A_i \neq \emptyset \text{ para } i \in I,$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ cuando } i \neq j,$$

y

$$\bigcup_{i \in I} A_i = S.$$

La Figura 1 ilustra el concepto de partición de un conjunto.

Clases de Equivalencia y Particiones VI

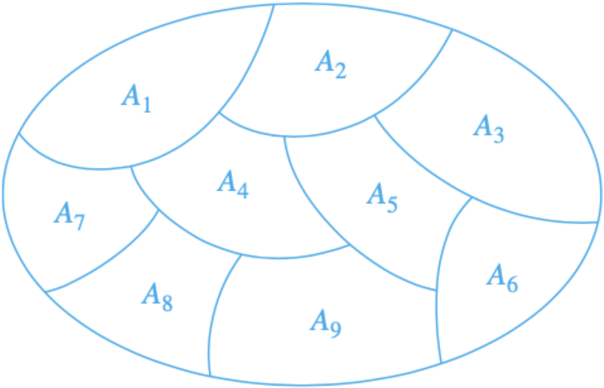

Figura 1: Una partición de un conjunto.

Ejemplo 11

Suponga que $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La colección de conjuntos $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{4, 5\}$ y $A_3 = \{6\}$ forma una partición de S, porque estos conjuntos son disjuntos y su unión es S. $\square$

Clases de Equivalencia y Particiones VII

- Hemos visto que las clases de equivalencia de una relación de equivalencia sobre un conjunto forman una partición del conjunto.

Clases de Equivalencia y Particiones VII

- Los subconjuntos de S en esta partición son las clases de equivalencia.

Clases de Equivalencia y Particiones VII

- A la inversa, cada partición de un conjunto se puede utilizar para formar una relación de equivalencia.

Clases de Equivalencia y Particiones VII

- Dos elementos son equivalentes con respecto a esta relación si y sólo si están en el mismo subconjunto de S en la partición.

Clases de Equivalencia y Particiones VII

- Para ver esto, suponga que $\{A_i | i \in I\}$ es una partición sobre S.

Clases de Equivalencia y Particiones VII

- Sea R la relación sobre S que consta de los pares (x, y), donde x y y pertenecen al mismo subconjunto A_i en la partición.

Clases de Equivalencia y Particiones VII

- Para demostrar que R es una relación de equivalencia, debemos demostrar que R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Clases de Equivalencia y Particiones VIII

- Vemos que $(a, a) \in R$ para todo $a \in S$, porque a está en el mismo subconjunto de S que él mismo. Por tanto, R es reflexiva.

- Si $(a, b) \in R$, entonces b y a están en el mismo subconjunto de S en la partición, de modo que $(b, a) \in R$ también. Por tanto, R es simétrica.

Clases de Equivalencia y Particiones VIII

- Si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces a y b están en el mismo subconjunto X de S en la partición, y b y c están en el mismo subconjunto Y de S de la partición.

Clases de Equivalencia y Particiones VIII

- Si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces a y b están en el mismo subconjunto X de S en la partición, y b y c están en el mismo subconjunto Y de S de la partición.
- Debido a que los subconjuntos de S en la partición son disjuntos y b pertenece a X y Y, se sigue que $X = Y$.

Clases de Equivalencia y Particiones VIII

- Si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces a y b están en el mismo subconjunto X de S en la partición, y b y c están en el mismo subconjunto Y de S de la partición.
- Debido a que los subconjuntos de S en la partición son disjuntos y b pertenece a X y Y, se sigue que $X = Y$.
- En consecuencia, a y c pertenecen al mismo subconjunto de S en la partición, por lo que $(a, c) \in R$.

- Si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces a y b están en el mismo subconjunto X de S en la partición, y b y c están en el mismo subconjunto Y de S de la partición.
- Debido a que los subconjuntos de S en la partición son disjuntos y b pertenece a X y Y, se sigue que $X = Y$.
- En consecuencia, a y c pertenecen al mismo subconjunto de S en la partición, por lo que $(a, c) \in R$.
- Por tanto, R es transitiva.

Clases de Equivalencia y Particiones IX

- De ello se deduce que R es una relación de equivalencia.

Clases de Equivalencia y Particiones IX

- Las clases de equivalencia de R consisten en subconjuntos de S que contienen elementos relacionados y, según la definición de R, estos son los subconjuntos de S en la partición.

Clases de Equivalencia y Particiones IX

- El teorema 2 resume las conexiones que hemos establecido entre las relaciones de equivalencia y las particiones.

Clases de Equivalencia y Particiones IX

Teorema 2

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto S. Entonces las clases de equivalencia de R forman una partición de S. A la inversa, dada una partición $\{A_i|i \in I\}$ del conjunto S, existe una relación de equivalencia R que tiene los conjuntos $A_i, i \in I$, como sus clases de equivalencia.

■

Ejemplo 12 I

Ejemplo 12

Enumere los pares ordenados en la relación de equivalencia R producida por la partición $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{4, 5\}$ y $A_3 = \{6\}$ de $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dada en el Ejemplo 11.

Solución:

Ejemplo 12

Enumere los pares ordenados en la relación de equivalencia R producida por la partición $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{4, 5\}$ y $A_3 = \{6\}$ de $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dada en el Ejemplo 11.

Solución:

- Los subconjuntos de S en la partición son las clases de equivalencia de R.

Ejemplo 12 I

Ejemplo 12

Enumere los pares ordenados en la relación de equivalencia R producida por la partición $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{4, 5\}$ y $A_3 = \{6\}$ de $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dada en el Ejemplo 11.

Solución:

- Los subconjuntos de S en la partición son las clases de equivalencia de R.
- El par $(a, b) \in R$ si y sólo si a y b están en el mismo subconjunto de S en la partición.

Ejemplo 12 II

- Los pares

$$(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)$$

pertenecen a R porque $A_1 = \{1,2,3\}$ es una clase de equivalencia;

Ejemplo 12 II

- los pares
$$(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)$$
pertenecen a R porque $A_2 = \{4, 5\}$ es una clase de equivalencia;

Ejemplo 12 II

- y finalmente el par

$$(6, 6)$$

pertenece a R porque $\{6\}$ es una clase de equivalencia.

Ejemplo 12 II

- Ningún par distinto a los enumerados pertenece a R. $\square$

Clases de Equivalencia y Particiones X

- Las clases de congruencia módulo m proporcionan una ilustración útil del Teorema 2.

- Hay m clases de congruencia diferentes módulo m, correspondientes a los m posibles residuos diferentes cuando un número entero se divide por m.

Clases de Equivalencia y Particiones X

- Estas m clases de congruencia se indican mediante $[0]_m$, $[1]_m, \ldots$, $[m-1]_m$ y forman una partición del conjunto de números enteros.

Ejemplo 13

¿Cuáles son los conjuntos en la partición de los enteros que surgen de la congruencia módulo 4?

Solución:

Ejemplo 13

¿Cuáles son los conjuntos en la partición de los enteros que surgen de la congruencia módulo 4?

Solución:

- En el Ejemplo 9 encontramos las cuatro clases de congruencia, $[0]_4, [1]_4, [2]_4$ y $[3]_4$. Son los conjuntos

$$
\begin{aligned}
[0]_4 &= \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}, \\
[1]_4 &= \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}, \\
[2]_4 &= \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\}, \\
[3]_4 &= \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 13

Ejemplo 13

¿Cuáles son los conjuntos en la partición de los enteros que surgen de la congruencia módulo 4?

Solución:

- En el Ejemplo 9 encontramos las cuatro clases de congruencia, $[0]_4, [1]_4, [2]_4$ y $[3]_4$. Son los conjuntos

$$\begin{aligned}
[0]_4 &= \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\},\\
[1]_4 &= \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\},\\
[2]_4 &= \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\},\\
[3]_4 &= \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}.
\end{aligned}$$

- Estas clases de congruencia son disjuntas y cada entero está exactamente en una de ellas.

Ejemplo 13

¿Cuáles son los conjuntos en la partición de los enteros que surgen de la congruencia módulo 4?

Solución:

- En el Ejemplo 9 encontramos las cuatro clases de congruencia, $[0]_4, [1]_4, [2]_4$ y $[3]_4$. Son los conjuntos

$$\begin{aligned} [0]_4 &= \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}, \\ [1]_4 &= \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\}, \\ [2]_4 &= \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\}, \\ [3]_4 &= \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}. \end{aligned}$$

- Estas clases de congruencia son disjuntas y cada entero está exactamente en una de ellas.
- En otras palabras, como dice el Teorema 2, estas clases de congruencia forman una partición. □

Ejemplo 14 I

Ejemplo 14

Sea R_3 la relación del Ejemplo 5. ¿Cuáles son los conjuntos en la partición del conjunto de todas las cadenas de bits que surgen de la relación R_3 en el conjunto de todas las cadenas de bits? (Recuerde que sR_3t, donde s y t son cadenas de bits, si $s = t$ o s y t son cadenas de bits con al menos tres bits que concuerdan en sus primeros tres bits).

Solución:

Ejemplo 14 I

Ejemplo 14

Sea R_3 la relación del Ejemplo 5. ¿Cuáles son los conjuntos en la partición del conjunto de todas las cadenas de bits que surgen de la relación R_3 en el conjunto de todas las cadenas de bits? (Recuerde que sR_3t, donde s y t son cadenas de bits, si $s = t$ o s y t son cadenas de bits con al menos tres bits que concuerdan en sus primeros tres bits).

Solución:

- Tenga en cuenta que cada cadena de bits de longitud inferior a tres es equivalente sólo a sí misma.

Ejemplo 14 I

Ejemplo 14

Sea R_3 la relación del Ejemplo 5. ¿Cuáles son los conjuntos en la partición del conjunto de todas las cadenas de bits que surgen de la relación R_3 en el conjunto de todas las cadenas de bits? (Recuerde que sR_3t, donde s y t son cadenas de bits, si $s = t$ o s y t son cadenas de bits con al menos tres bits que concuerdan en sus primeros tres bits).

Solución:

- Tenga en cuenta que cada cadena de bits de longitud inferior a tres es equivalente sólo a sí misma.
- Por tanto, $[\lambda]_{R_3} = \{\lambda\}$, $[0]_{R_3} = \{0\}$, $[1]_{R_3} = \{1\}$, $[00]_{R_3} = \{00\}$, $[01]_{R_3} = \{01\}$, $[10]_{R_3} = \{10\}$ y $[11]_{R_3} = \{11\}$.

Ejemplo 14 II

- Tenga en cuenta que cada cadena de bits de longitud tres o más es equivalente a una de las ocho cadenas de bits 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 y 111.

Ejemplo 14 II

- Tenga en cuenta que cada cadena de bits de longitud tres o más es equivalente a una de las ocho cadenas de bits 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 y 111.
- Tenemos

$$
\begin{aligned}
[000]_{R_3} &= \{000, 0000, 0001, 00000, 00001, 00010, 00011, \ldots\},\\
[001]_{R_3} &= \{001, 0010, 0011, 00100, 00101, 00110, 00111, \ldots\},\\
[010]_{R_3} &= \{010, 0100, 0101, 01000, 01001, 01010, 01011, \ldots\},\\
[011]_{R_3} &= \{011, 0110, 0111, 01100, 01101, 01110, 01111, \ldots\},\\
[100]_{R_3} &= \{100, 1000, 1001, 10000, 10001, 10010, 10011, \ldots\},\\
[101]_{R_3} &= \{101, 1010, 1011, 10100, 10101, 10110, 10111, \ldots\},\\
[110]_{R_3} &= \{110, 1100, 1101, 11000, 11001, 11010, 11011, \ldots\},\\
[111]_{R_3} &= \{111, 1110, 1111, 11100, 11101, 11110, 11111, \ldots\}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 14 II

- Tenga en cuenta que cada cadena de bits de longitud tres o más es equivalente a una de las ocho cadenas de bits 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 y 111.
- Tenemos

$$
\begin{aligned}
[000]_{R_3} &= \{000, 0000, 0001, 00000, 00001, 00010, 00011, \ldots\},\\
[001]_{R_3} &= \{001, 0010, 0011, 00100, 00101, 00110, 00111, \ldots\},\\
[010]_{R_3} &= \{010, 0100, 0101, 01000, 01001, 01010, 01011, \ldots\},\\
[011]_{R_3} &= \{011, 0110, 0111, 01100, 01101, 01110, 01111, \ldots\},\\
[100]_{R_3} &= \{100, 1000, 1001, 10000, 10001, 10010, 10011, \ldots\},\\
[101]_{R_3} &= \{101, 1010, 1011, 10100, 10101, 10110, 10111, \ldots\},\\
[110]_{R_3} &= \{110, 1100, 1101, 11000, 11001, 11010, 11011, \ldots\},\\
[111]_{R_3} &= \{111, 1110, 1111, 11100, 11101, 11110, 11111, \ldots\}.
\end{aligned}
$$

- Estas 15 clases de equivalencia son disjuntas y cada cadena de bits está exactamente en una de ellas.

Ejemplo 14 II

- Tenga en cuenta que cada cadena de bits de longitud tres o más es equivalente a una de las ocho cadenas de bits 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 y 111.
- Tenemos

$$
\begin{aligned}
[000]_{R_3} &= \{000, 0000, 0001, 00000, 00001, 00010, 00011, \ldots\},\\
[001]_{R_3} &= \{001, 0010, 0011, 00100, 00101, 00110, 00111, \ldots\},\\
[010]_{R_3} &= \{010, 0100, 0101, 01000, 01001, 01010, 01011, \ldots\},\\
[011]_{R_3} &= \{011, 0110, 0111, 01100, 01101, 01110, 01111, \ldots\},\\
[100]_{R_3} &= \{100, 1000, 1001, 10000, 10001, 10010, 10011, \ldots\},\\
[101]_{R_3} &= \{101, 1010, 1011, 10100, 10101, 10110, 10111, \ldots\},\\
[110]_{R_3} &= \{110, 1100, 1101, 11000, 11001, 11010, 11011, \ldots\},\\
[111]_{R_3} &= \{111, 1110, 1111, 11100, 11101, 11110, 11111, \ldots\}.
\end{aligned}
$$

- Estas 15 clases de equivalencia son disjuntas y cada cadena de bits está exactamente en una de ellas.
- Como nos dice el Teorema 2, estas clases de equivalencia dividen el conjunto de todas las cadenas de bits. $\square$

Ejercicios I

1. ¿Cuáles de estas relaciones sobre $\{0, 1, 2, 3\}$ son relaciones de equivalencia? Determine la(s) propiedad(es) de una relación de equivalencia de la(s) que carece(n) la(s) que no lo es(son).
    1. $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
    2. $\{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$
    3. $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
    4. $\{(0, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
    5. $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 3)\}$
2. ¿Cuáles de estas relaciones sobre el conjunto de todas las personas son relaciones de equivalencia? Determine la(s) propiedad(es) de una relación de equivalencia de la(s) que carece(n) la(s) que no lo es(son).
    1. $\{(a, b)|a$ y b tienen la misma edad$\}$
    2. $\{(a, b)|a$ y b tienen los mismos progenitores$\}$
    3. $\{(a, b)|a$ y b tienen sólo un progenitor en común$\}$
    4. $\{(a, b)|a$ y b se conocen$\}$
    5. $\{(a, b)|a$ y b hablan un idioma en común$\}$

Ejercicios II

3. ¿Cuáles son las clases de equivalencia de las relaciones de equivalencia en el ejercicio 1?
4. ¿Cuáles son las clases de equivalencia de las relaciones de equivalencia en el ejercicio 2?
5. ¿Cuál es la clase de congruencia $[n]_5$ (es decir, la clase de equivalencia de n con respecto a la congruencia módulo 5) cuando n es
    1. 2?
    2. 3?
    3. 6?
    4. -3?
6. ¿Cuál es la clase de congruencia $[4]_m$ cuando m es
    1. 2?
    2. 3?
    3. 6?
    4. 8?
7. ¿Cuáles de estas colecciones de subconjuntos son particiones del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?
    1. $\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}$
    2. $\{1\}, \{2, 3, 6\}, \{4\}, \{5\}$

Ejercicios III

3. $\{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}$
4. $\{1, 4, 5\}, \{2, 6\}$

8. ¿Cuáles de estas colecciones de subconjuntos son particiones del conjunto $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$?
   1. $\{-3, -1, 1, 3\}, \{-2, 0, 2\}$
   2. $\{-3, -2, -1, 0\}, \{0, 1, 2, 3\}$
   3. $\{-3, 3\}, \{-2, 2\}, \{-1, 1\}, \{0\}$
   4. $\{-3, -2, 2, 3\}, \{-1, 1\}$