Relaciones III

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Estructuras Discretas CCOS 009

Primavera 2021

Contenido

Motivación I

- Una red de computadoras tiene centros de datos en Boston, Chicago, Denver, Detroit, Nueva York y San Diego.

Motivación I

- Hay líneas telefónicas directas unidireccionales de Boston a Chicago, de Boston a Detroit, de Chicago a Detroit, de Detroit a Denver y de Nueva York a San Diego.

Motivación I

- Sea R la relación que contiene (a, b) si hay una línea telefónica desde el centro de datos en a hasta el de b.

Motivación I

- ¿Cómo podemos determinar si existe algún enlace (posiblemente indirecto) compuesto por una o más líneas telefónicas de un centro a otro?

Motivación II

- Debido a que no todos los enlaces son directos, como el enlace de Boston a Denver que pasa por Detroit, R no se puede utilizar directamente para responder a esto.

Motivación II

- En el lenguaje de las relaciones, R no es transitiva, por lo que no contiene todos los pares que se pueden vincular.

Motivación II

- Como mostraremos en esta sección, podemos encontrar todos los pares de centros de datos que tienen un enlace al construir una relación transitiva S que contenga R tal que S sea un subconjunto de toda relación transitiva que contenga R.

Motivación II

- Aquí, S es la relación transitiva más pequeña que contiene R. Esta relación se llama **cerradura transitiva** de R.

- Si R es una relación sobre un conjunto A, puede tener o no alguna propiedad P, como reflexividad, simetría o transitividad.

Concepto de Cerradura I

- Cuando R no tiene la propiedad P, nos gustaría encontrar la relación más pequeña S sobre A con la propiedad P que contiene R.

Concepto de Cerradura I

Definición 1

Si R es una relación sobre un conjunto A, entonces la *cerradura* de R con respecto a P, si existe, es la relación S sobre A con la propiedad P que contiene R y es un subconjunto de cada subconjunto de $A \times A$ que contiene R con propiedad P.

Concepto de Cerradura II

- Si hay una relación S que es un subconjunto de cada relación que contiene R con propiedad P, debe ser única.

- Para ver esto, suponga que las relaciones S y T tienen la propiedad P y son subconjuntos de toda relación con la propiedad P que contiene R.

Concepto de Cerradura II

- Entonces, S y T son subconjuntos entre sí y, por lo tanto, son iguales.

Concepto de Cerradura II

- Tal relación, si existe, es la relación más pequeña con la propiedad P que contiene R porque es un subconjunto de toda relación con la propiedad P que contiene R.

Concepto de Cerradura II

- Mostraremos cómo se pueden encontrar cerraduras reflexivas, simétricas y transitivas de relaciones.

- La relación $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$ sobre el conjunto $A = \{1,2,3\}$ no es reflexiva.

Cerradura Reflexiva I

- La relación $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$ sobre el conjunto $A = \{1,2,3\}$ no es reflexiva.
- ¿Cómo podemos producir una relación reflexiva que contenga R que sea lo más pequeña posible?

Cerrada Reflexiva I

- La relación $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$ sobre el conjunto $A = \{1,2,3\}$ no es reflexiva.
- ¿Cómo podemos producir una relación reflexiva que contenga R que sea lo más pequeña posible?
- Esto se puede hacer agregando $(2,2)$ y $(3,3)$ a R, porque estos son los únicos pares de la forma (a,a) que no están en R.

Cerrada Reflexiva I

- La relación $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$ sobre el conjunto $A = \{1,2,3\}$ no es reflexiva.
- ¿Cómo podemos producir una relación reflexiva que contenga R que sea lo más pequeña posible?
- Esto se puede hacer agregando $(2,2)$ y $(3,3)$ a R, porque estos son los únicos pares de la forma (a,a) que no están en R.
- Esta nueva relación contiene R.

Cerrada Reflexiva I

Cerradura Reflexiva II

- Debido a que esta relación contiene R, es reflexiva y está contenida dentro de cada relación reflexiva que contiene R, se denomina **cerradura reflexiva** de R.

- Como ilustra este ejemplo, dada una relación R sobre un conjunto A, la cerradura reflexiva de R se puede formar sumando a R todos los pares de la forma (a, a) con $a \in A$, que no estaban en R.

Cerrada Reflexiva II

- La suma de estos pares produce una nueva relación que es reflexiva, contiene R, y está contenida dentro de cualquier relación reflexiva que contiene R.

Cerradura Reflexiva II

- Vemos que la cerradura reflexiva de R es igual a $R \cup \Delta$, donde $\Delta = \{(a,a) | a \in A\}$ es la **relación diagonal** en A.

Cerradura Reflexiva III

Ejemplo 1

¿Cuál es la cerradura reflexiva de la relación $R = \{(a, b)|a < b\}$ sobre el conjunto de números enteros?

Cerradura Reflexiva III

Ejemplo 1

¿Cuál es la cerradura reflexiva de la relación $R = \{(a, b) | a < b\}$ sobre el conjunto de números enteros?

Solución: La cerradura reflexiva de R es

$$R \cup \Delta = \{(a, b) | a < b\} \cup \{(a, a) | a \in \mathbb{Z}\} = \{(a, b) | a \leq b\}.$$

$\square$

Cerrada Simétrica I

- La relación

$$\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$$

en $\{1,2,3\}$ no es simétrica.

Cerrada Simétrica I

- La relación

$$\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$$

  en $\{1,2,3\}$ no es simétrica.
- ¿Cómo podemos producir una relación simétrica que sea lo más pequeña posible y contenga R?

Cerradura Simétrica I

- La relación

$$\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$$

  en $\{1,2,3\}$ no es simétrica.
- ¿Cómo podemos producir una relación simétrica que sea lo más pequeña posible y contenga R?
- Para hacer esto, solo necesitamos sumar $(2,1)$ y $(1,3)$, porque estos son los únicos pares de la forma (b,a) con $(a,b) \in R$ que no están en R.

Cerrada Simétrica I

- La relación

$$\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$$

  en $\{1,2,3\}$ no es simétrica.
- ¿Cómo podemos producir una relación simétrica que sea lo más pequeña posible y contenga R?
- Para hacer esto, solo necesitamos sumar $(2,1)$ y $(1,3)$, porque estos son los únicos pares de la forma (b,a) con $(a,b) \in R$ que no están en R.
- Esta nueva relación es simétrica y contiene R.

Cerradura Simétrica I

- La relación

$$\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$$

  en $\{1,2,3\}$ no es simétrica.
- ¿Cómo podemos producir una relación simétrica que sea lo más pequeña posible y contenga R?
- Para hacer esto, solo necesitamos sumar $(2,1)$ y $(1,3)$, porque estos son los únicos pares de la forma (b,a) con $(a,b) \in R$ que no están en R.
- Esta nueva relación es simétrica y contiene R.
- Además, cualquier relación simétrica que contiene R debe contener esta nueva relación, porque una relación simétrica que contiene R debe contener $(2,1)$ y $(1,3)$.

- En consecuencia, esta nueva relación se denomina **cerradura simétrica** de R.

Cerrada Simétrica II

- Como ilustra este ejemplo, la cerradura simétrica de una relación R se puede construir sumando todos los pares ordenados de la forma (b, a), donde (a, b) está en la relación, que no están ya presentes en R.

Cerradura Simétrica II

- Sumando estos pares produce una relación que es simétrica, que contiene R, y que está contenida en cualquier relación simétrica que contiene R.

- La cerradura simétrica de una relación se puede construir tomando la unión de una relación con su inversa, es decir, $R \cup R^{-1}$ es la cerradura simétrica de R, donde $R^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in R\}$.

Ejemplo 2

¿Cuál es la cerradura simétrica de la relación $R = \{(a, b) | a > b\}$ en el conjunto de enteros positivos?

Ejemplo 2

¿Cuál es la cerradura simétrica de la relación $R = \{(a, b)|a > b\}$ en el conjunto de enteros positivos?

Solución: La cerradura simétrica de R es la relación

$$R \cup R^{-1} = \{(a, b)|a > b\} \cup \{(b, a)|a > b\} = \{(a, b)|a \neq b\}.$$

Ejemplo 2

¿Cuál es la cerradura simétrica de la relación $R = \{(a,b)|a > b\}$ en el conjunto de enteros positivos?

Solución: La cerradura simétrica de R es la relación

$$R \cup R^{-1} = \{(a,b)|a > b\} \cup \{(b,a)|a > b\} = \{(a,b)|a \neq b\}.$$

Esta última igualdad se sigue porque R contiene todos los pares ordenados de enteros positivos, donde el primer elemento es mayor que el segundo elemento, y R^{-1} contiene todos los pares ordenados de enteros positivos, donde el primer elemento es menor que el segundo.

Cerradura Transitiva I

- Suponga que una relación R no es transitiva.

Cerradura Transitiva I

- ¿Cómo podemos producir una relación transitiva que contenga R de manera que esta nueva relación esté contenida dentro de cualquier relación transitiva que contenga R?

- ¿Puede producirse la cerradura transitiva de una relación R sumando todos los pares de la forma (a, c), donde (a, b) y (b, c) ya están en la relación?

Cerrada Transitiva II

- Considere la relación $R = \{(1,3),(1,4),(2,1),(3,2)\}$ sobre el conjunto $\{1,2,3,4\}$.

Cerrada Transitiva II

- Considere la relación $R = \{(1,3),(1,4),(2,1),(3,2)\}$ sobre el conjunto $\{1,2,3,4\}$.
- Esta relación no es transitiva porque no contiene todos los pares de la forma (a,c) donde (a,b) y (b,c) están en R.

- Considere la relación $R = \{(1,3),(1,4),(2,1),(3,2)\}$ sobre el conjunto $\{1,2,3,4\}$.
- Esta relación no es transitiva porque no contiene todos los pares de la forma (a,c) donde (a,b) y (b,c) están en R.
- Los pares de esta forma que no están en R son $(1,2),(2,3),(2,4)$ y $(3,1)$.

- Considere la relación $R = \{(1,3),(1,4),(2,1),(3,2)\}$ sobre el conjunto $\{1,2,3,4\}$.
- Esta relación no es transitiva porque no contiene todos los pares de la forma (a,c) donde (a,b) y (b,c) están en R.
- Los pares de esta forma que no están en R son $(1,2),(2,3),(2,4)$ y $(3,1)$.
- Sumar estos pares no produce una relación transitiva, porque la relación resultante contiene $(3,1)$ y $(1,4)$ pero no contiene $(3,4)$.

Cerradura Transitiva III

- Esto muestra que construir la cerradura transitiva de una relación es más complicado que construir las cerraduras reflexiva o simétrica.

Cerradura Transitiva III

- El resto de esta sección desarrolla algoritmos para construir cerraduras transitivas.

Cerradura Transitiva III

- Como se mostrará más adelante en esta sección, la cerradura transitiva de una relación se puede encontrar agregando nuevos pares ordenados que deben estar presentes y luego repitiendo este proceso hasta que no se necesiten nuevos pares ordenados.

Rutas en grafos dirigidos I

- Veremos que representar relaciones mediante grafos dirigidos ayuda en la construcción de cerraduras transitivas.

Rutas en grafos dirigidos I

- A continuación, presentamos algunos términos que usaremos para este propósito.

Rutas en grafos dirigidos I

- Una ruta (o camino) en un grafo dirigido se obtiene atravesando las aristas (en la misma dirección que indica la flecha en la arista).

Definición 2

Una *ruta* (o *camino*) de a a b en el grafo dirigido G es una secuencia de aristas (x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), $\ldots, (x_{n-1}, x_n)$ en G, donde n es un número entero no negativo, $x_0 = a$ y $x_n = b$, es decir, una secuencia de aristas donde el vértice terminal de una arista es el mismo que el vértice inicial en la siguiente arista de la ruta. Esta ruta se denota por $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ y tiene una longitud n. Vemos el conjunto vacío de aristas como una ruta de longitud cero de a a a. Una ruta de longitud $n \geq 1$ que comienza y termina en el mismo vértice se llama *circuito* o *ciclo*.

Rutas en grafos dirigidos II

Definición 2

Una *ruta* (o *camino*) de a a b en el grafo dirigido G es una secuencia de aristas (x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), $\ldots$, (x_{n-1}, x_n) en G, donde n es un número entero no negativo, $x_0 = a$ y $x_n = b$, es decir, una secuencia de aristas donde el vértice terminal de una arista es el mismo que el vértice inicial en la siguiente arista de la ruta. Esta ruta se denota por $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ y tiene una longitud n. Vemos el conjunto vacío de aristas como una ruta de longitud cero de a a a. Una ruta de longitud $n \geq 1$ que comienza y termina en el mismo vértice se llama *circuito* o *ciclo*.

- Una ruta en un grafo dirigido puede pasar por un vértice más de una vez.

Definición 2

Una *ruta* (o *camino*) de a a b en el grafo dirigido G es una secuencia de aristas (x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), $\ldots$, (x_{n-1}, x_n) en G, donde n es un número entero no negativo, $x_0 = a$ y $x_n = b$, es decir, una secuencia de aristas donde el vértice terminal de una arista es el mismo que el vértice inicial en la siguiente arista de la ruta. Esta ruta se denota por $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ y tiene una longitud n. Vemos el conjunto vacío de aristas como una ruta de longitud cero de a a a. Una ruta de longitud $n \geq 1$ que comienza y termina en el mismo vértice se llama *circuito* o *ciclo*.

- Además, una arista en un grafo dirigido puede ocurrir más de una vez en una ruta.

Ejemplo 3

¿Cuáles de los siguientes son caminos en el grafo dirigido que se muestra en la Figura 1: a, b, e, d; a, e, c, d, b; b, a, c, b, a, a, b; d, c; c, b, a; e, b, a, b, a, b, e? ¿Cuáles son las longitudes de esos caminos? ¿Cuáles de los caminos de esta lista son circuitos?

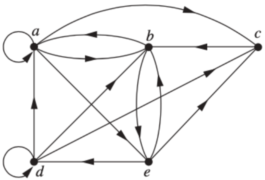


Figura 1: Grafo dirigido para el Ejemplo 3.

Ejemplo 3

¿Cuáles de los siguientes son caminos en el grafo dirigido que se muestra en la Figura 1: a, b, e, d; a, e, c, d, b; b, a, c, b, a, a, b; d, c; c, b, a; e, b, a, b, a, b, e? ¿Cuáles son las longitudes de esos caminos? ¿Cuáles de los caminos de esta lista son circuitos?

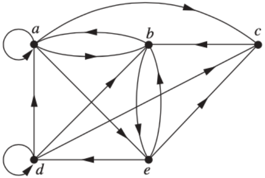
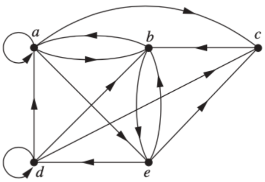


Figura 1: Grafo dirigido para el Ejemplo 3.

Solución:

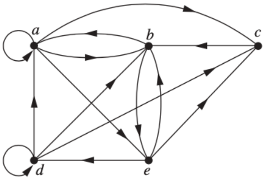
- Debido a que cada uno de $(a, b), (b, e)$ y (e, d) es una arista, a, b, e, d es una ruta de longitud tres.

Rutas en grafos dirigidos IV



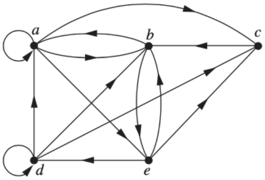
- Como (c, d) no es una arista, a, e, c, d, b no es una ruta.

Rutas en grafos dirigidos IV



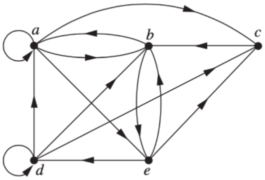
- Además, b, a, c, b, a, a, b es un camino de longitud seis porque $(b, a), (a, c), (c, b), (b, a), (a, a)$ y (a, b) son aristas.

Rutas en grafos dirigidos IV



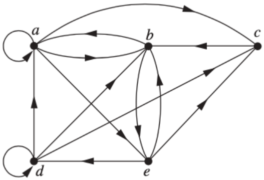
- Vemos que d, c es un camino de longitud uno, porque (d, c) es una arista.

Rutas en grafos dirigidos IV



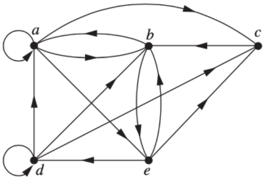
- También c, b, a es un camino de longitud dos, porque (c, b) y (b, a) son aristas.

Rutas en grafos dirigidos IV



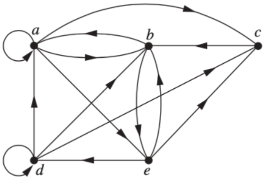
- Todos $(e, b), (b, a), (a, b), (b, a), (a, b)$ y (b, e) son aristas, por lo que e, b, a, b, a, b, e es un camino de longitud seis.

Rutas en grafos dirigidos IV



- Los dos caminos b, a, c, b, a, a, b y e, b, a, b, a, b, e son circuitos porque comienzan y terminan en el mismo vértice.

Rutas en grafos dirigidos IV



- Los caminos a, b, e, d; c, b, a y d, c no son circuitos. $\square$

Rutas en grafos dirigidos V

- El término *ruta* también se aplica a las relaciones.

- Trasladando la definición de grafos dirigidos a relaciones, hay una **ruta** de a a b en R si hay una secuencia de elementos $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ con $(a, x_1) \in R$, $(x_1, x_2) \in R, \ldots$ y $(x_{n-1}, b) \in R$.

- El teorema 1 puede obtenerse de la definición de una ruta en una relación.

Rutas en grafos dirigidos VI

Teorema 1

Sea R una relación sobre un conjunto A. Hay un camino de longitud n, donde n es un entero positivo, de a a b si y sólo si $(a, b) \in R^n$.

Demostración: Usaremos inducción matemática.

Rutas en grafos dirigidos VI

Teorema 1

Sea R una relación sobre un conjunto A. Hay un camino de longitud n, donde n es un entero positivo, de a a b si y sólo si $(a, b) \in R^n$.

Demostración: Usaremos inducción matemática.

- Por definición, hay un camino de a a b de longitud uno si y sólo si $(a, b) \in R$, por lo que el teorema es verdadero cuando $n = 1$.

Teorema 1

Sea R una relación sobre un conjunto A. Hay un camino de longitud n, donde n es un entero positivo, de a a b si y sólo si $(a, b) \in R^n$.

Demostración: Usaremos inducción matemática.

- Por definición, hay un camino de a a b de longitud uno si y sólo si $(a, b) \in R$, por lo que el teorema es verdadero cuando $n = 1$.
- Suponga que el teorema es cierto para el entero positivo n (esta es la hipótesis inductiva).

Rutas en grafos dirigidos VI

Teorema 1

Sea R una relación sobre un conjunto A. Hay un camino de longitud n, donde n es un entero positivo, de a a b si y sólo si $(a, b) \in R^n$.

Demostración: Usaremos inducción matemática.

- Por definición, hay un camino de a a b de longitud uno si y sólo si $(a, b) \in R$, por lo que el teorema es verdadero cuando $n = 1$.
- Suponga que el teorema es cierto para el entero positivo n (esta es la hipótesis inductiva).
- Hay un camino de longitud $n + 1$ desde a hasta b si y sólo si hay un elemento $c \in A$ tal que hay un camino de longitud uno desde a hasta c, entonces $(a, c) \in R$, y un camino de longitud n de c a b, es decir, $(c, b) \in R^n$.

Rutas en grafos dirigidos VI

Teorema 1

Sea R una relación sobre un conjunto A. Hay un camino de longitud n, donde n es un entero positivo, de a a b si y sólo si $(a, b) \in R^n$.

Demostración: Usaremos inducción matemática.

- Por definición, hay un camino de a a b de longitud uno si y sólo si $(a, b) \in R$, por lo que el teorema es verdadero cuando $n = 1$.
- Suponga que el teorema es cierto para el entero positivo n (esta es la hipótesis inductiva).
- Hay un camino de longitud $n + 1$ desde a hasta b si y sólo si hay un elemento $c \in A$ tal que hay un camino de longitud uno desde a hasta c, entonces $(a, c) \in R$, y un camino de longitud n de c a b, es decir, $(c, b) \in R^n$.
- En consecuencia, según la hipótesis inductiva, hay un camino de longitud $n + 1$ desde a hasta b si y sólo si hay un elemento c con $(a, c) \in R$ y $(c, b) \in R^n$.

Rutas en grafos dirigidos VI

Teorema 1

Sea R una relación sobre un conjunto A. Hay un camino de longitud n, donde n es un entero positivo, de a a b si y sólo si $(a, b) \in R^n$.

Demostración: Usaremos inducción matemática.

- Por definición, hay un camino de a a b de longitud uno si y sólo si $(a, b) \in R$, por lo que el teorema es verdadero cuando $n = 1$.
- Suponga que el teorema es cierto para el entero positivo n (esta es la hipótesis inductiva).
- Hay un camino de longitud $n + 1$ desde a hasta b si y sólo si hay un elemento $c \in A$ tal que hay un camino de longitud uno desde a hasta c, entonces $(a, c) \in R$, y un camino de longitud n de c a b, es decir, $(c, b) \in R^n$.
- En consecuencia, según la hipótesis inductiva, hay un camino de longitud $n + 1$ desde a hasta b si y sólo si hay un elemento c con $(a, c) \in R$ y $(c, b) \in R^n$.
- Pero existe tal elemento si y sólo si $(a, b) \in R^{n+1}$.

Teorema 1

Sea R una relación sobre un conjunto A. Hay un camino de longitud n, donde n es un entero positivo, de a a b si y sólo si $(a, b) \in R^n$.

Demostración: Usaremos inducción matemática.

- Por definición, hay un camino de a a b de longitud uno si y sólo si $(a, b) \in R$, por lo que el teorema es verdadero cuando $n = 1$.
- Suponga que el teorema es cierto para el entero positivo n (esta es la hipótesis inductiva).
- Hay un camino de longitud $n + 1$ desde a hasta b si y sólo si hay un elemento $c \in A$ tal que hay un camino de longitud uno desde a hasta c, entonces $(a, c) \in R$, y un camino de longitud n de c a b, es decir, $(c, b) \in R^n$.
- En consecuencia, según la hipótesis inductiva, hay un camino de longitud $n + 1$ desde a hasta b si y sólo si hay un elemento c con $(a, c) \in R$ y $(c, b) \in R^n$.
- Pero existe tal elemento si y sólo si $(a, b) \in R^{n+1}$.
- Por lo tanto, hay un camino de longitud $n + 1$ de a a b si y sólo si $(a, b) \in R^{n+1}$. ■

Cerradura Transitiva I

- Ahora mostramos que encontrar la cerradura transitiva de una relación es equivalente a determinar qué pares de vértices en el grafo dirigido asociado están conectados por una ruta.

Cerradura Transitiva I

- Con esto en mente, definimos una nueva relación.

Definición 3

Sea R una relación sobre un conjunto A. La *relación de conectividad* R^* consta de los pares (a, b) tales que hay un camino de longitud al menos uno desde a hasta b en R.

Cerradura Transitiva I

Definición 3

Sea R una relación sobre un conjunto A. La *relación de conectividad* R^* consta de los pares (a, b) tales que hay un camino de longitud al menos uno desde a hasta b en R.

Dado que R^n consta de los pares (a, b) tales que hay un camino de longitud n desde a hasta b, se deduce que R^* es la unión de todos los conjuntos R^n.

Definición 3

Sea R una relación sobre un conjunto A. La *relación de conectividad* R^* consta de los pares (a, b) tales que hay un camino de longitud al menos uno desde a hasta b en R.

Dado que R^n consta de los pares (a, b) tales que hay un camino de longitud n desde a hasta b, se deduce que R^* es la unión de todos los conjuntos R^n. En otras palabras,

$$R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n.$$

Cerradura Transitiva II

Ejemplo 4

Sea R la relación sobre el conjunto de todas las personas en el mundo que contiene (a, b) si a ha conocido a b. ¿Qué es R^n, donde n es un número entero positivo mayor que uno? ¿Qué es R^*?

Solución:

Cerradura Transitiva II

Ejemplo 4

Sea R la relación sobre el conjunto de todas las personas en el mundo que contiene (a, b) si a ha conocido a b. ¿Qué es R^n, donde n es un número entero positivo mayor que uno? ¿Qué es R^*?

Solución:

- La relación R^2 contiene (a, b) si hay una persona c tal que $(a, c) \in R$ y $(c, b) \in R$, es decir, si hay una persona c tal que a ha conocido a c y c ha conocido a b.

Cerradura Transitiva II

Ejemplo 4

Sea R la relación sobre el conjunto de todas las personas en el mundo que contiene (a, b) si a ha conocido a b. ¿Qué es R^n, donde n es un número entero positivo mayor que uno? ¿Qué es R^*?

Solución:

- De manera similar, R^n consta de esos pares (a, b) tales que hay personas $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ tales que a ha conocido a x_1, x_1 ha conocido a $x_2, \ldots,$ y x_{n-1} ha conocido a b.

Cerradura Transitiva II

Ejemplo 4

Sea R la relación sobre el conjunto de todas las personas en el mundo que contiene (a, b) si a ha conocido a b. ¿Qué es R^n, donde n es un número entero positivo mayor que uno? ¿Qué es R^*?

Solución:

- La relación R^* contiene (a, b) si hay una secuencia de personas, comenzando con a y terminando con b, de manera que cada persona en la secuencia ha conocido a la siguiente persona en la secuencia.

Cerradura Transitiva II

Ejemplo 4

Sea R la relación sobre el conjunto de todas las personas en el mundo que contiene (a, b) si a ha conocido a b. ¿Qué es R^n, donde n es un número entero positivo mayor que uno? ¿Qué es R^*?

Solución:

- Hay muchas conjeturas interesantes sobre R^*. ¿Crees que esta relación de conectividad incluye a la pareja contigo como primer elemento y al presidente de Mongolia como segundo elemento? $\square$

Cerradura Transitiva III

Ejemplo 5

Sea R la relación del conjunto de todas las paradas del metro en la ciudad de Nueva York que contiene (a, b) si es posible viajar desde la parada a hasta la parada b sin cambiar de tren. ¿Qué es R^n cuando n es un número entero positivo? ¿Qué es R^*?

Solución:

Cerradura Transitiva III

Ejemplo 5

Sea R la relación del conjunto de todas las paradas del metro en la ciudad de Nueva York que contiene (a, b) si es posible viajar desde la parada a hasta la parada b sin cambiar de tren. ¿Qué es R^n cuando n es un número entero positivo? ¿Qué es R^*?

Solución:

- La relación R^n contiene (a, b) si es posible viajar desde la parada a hasta la parada b haciendo como máximo $n - 1$ cambios de trenes.

Cerradura Transitiva III

Ejemplo 5

Sea R la relación del conjunto de todas las paradas del metro en la ciudad de Nueva York que contiene (a, b) si es posible viajar desde la parada a hasta la parada b sin cambiar de tren. ¿Qué es R^n cuando n es un número entero positivo? ¿Qué es R^*?

Solución:

- La relación R^* consta de los pares ordenados (a, b) donde es posible viajar desde la parada a hasta la parada b haciendo tantos cambios de tren como sea necesario. $\square$

Ejemplo 6

Sea R la relación del conjunto de todos los estados de los Estados Unidos que contiene (a, b) si el estado a y el estado b tienen una frontera común. ¿Qué es R^n, donde n es un número entero positivo? ¿Qué es R^*?

Solución:

Cerradura Transitiva IV

Ejemplo 6

Sea R la relación del conjunto de todos los estados de los Estados Unidos que contiene (a, b) si el estado a y el estado b tienen una frontera común. ¿Qué es R^n, donde n es un número entero positivo? ¿Qué es R^*?

Solución:

- La relación R^n consta de los pares (a, b), donde es posible pasar del estado a al estado b cruzando exactamente n fronteras estatales.

Ejemplo 6

Sea R la relación del conjunto de todos los estados de los Estados Unidos que contiene (a, b) si el estado a y el estado b tienen una frontera común. ¿Qué es R^n, donde n es un número entero positivo? ¿Qué es R^*?

Solución:

- R^* consta de los pares ordenados (a, b), donde es posible pasar del estado a al estado b cruzando tantas fronteras como sea necesario.

Ejemplo 6

Sea R la relación del conjunto de todos los estados de los Estados Unidos que contiene (a, b) si el estado a y el estado b tienen una frontera común. ¿Qué es R^n, donde n es un número entero positivo? ¿Qué es R^*?

Solución:

- Los únicos pares ordenados que no están en R^* son los que contienen estados que no están conectados a los Estados Unidos continentales (es decir, los pares que contienen Alaska o Hawai). $\square$

Teorema 2

La cerradura transitiva de una relación R es igual a la relación de conectividad R^*.

Demostración:

Cerradura Transitiva V

Teorema 2

La cerradura transitiva de una relación R es igual a la relación de conectividad R^*.

Demostración:

- Tenga en cuenta que R^* contiene R por definición.

Teorema 2

La cerradura transitiva de una relación R es igual a la relación de conectividad R^*.

Demostración:

- Para mostrar que R^* es la cerradura transitiva de R, también debemos mostrar que R^* es transitiva y que $R^* \subseteq S$ siempre que S es una relación transitiva que contiene R.

Teorema 2

La cerradura transitiva de una relación R es igual a la relación de conectividad R^*.

Demostración:

- Primero, mostramos que R^* es transitiva.

Teorema 2

La cerradura transitiva de una relación R es igual a la relación de conectividad R^*.

Demostración:

- Si $(a, b) \in R^*$ y $(b, c) \in R^*$, entonces hay caminos de a a b y de b a c en R.

Cerradura Transitiva V

Teorema 2

La cerradura transitiva de una relación R es igual a la relación de conectividad R^*.

Demostración:

- Obtenemos un camino de a a c al comenzar con el camino de a a b y seguirlo con el camino de b a c. Por tanto, $(a, c) \in R^*$.

Cerradura Transitiva V

Teorema 2

La cerradura transitiva de una relación R es igual a la relación de conectividad R^*.

Demostración:

- De ello se deduce que R^* es transitiva.

Cerradura Transitiva VI

- Suponga ahora que S es una relación transitiva que contiene R.

Cerradura Transitiva VI

- Suponga ahora que S es una relación transitiva que contiene R.
- Dado que S es transitiva, S^n también es transitiva (el lector debe verificarlo) y $S^n \subseteq S$ (según el Teorema 2 de las notas).

Cerradura Transitiva VI

- Suponga ahora que S es una relación transitiva que contiene R.
- Dado que S es transitiva, S^n también es transitiva (el lector debe verificarlo) y $S^n \subseteq S$ (según el Teorema 2 de las notas).
- Aún más, ya que

$$S^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} S^k$$

y $S^k \subseteq S$, se sigue que $S^* \subseteq S$.

Cerradura Transitiva VI

- Suponga ahora que S es una relación transitiva que contiene R.
- Dado que S es transitiva, S^n también es transitiva (el lector debe verificarlo) y $S^n \subseteq S$ (según el Teorema 2 de las notas).
- Aún más, ya que

$$S^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} S^k$$

  y $S^k \subseteq S$, se sigue que $S^* \subseteq S$.
- Ahora observe que si $R \subseteq S$, entonces $R^* \subseteq S^*$, porque cualquier camino en R también es un camino en S.

Cerradura Transitiva VI

- Suponga ahora que S es una relación transitiva que contiene R.
- Dado que S es transitiva, S^n también es transitiva (el lector debe verificarlo) y $S^n \subseteq S$ (según el Teorema 2 de las notas).
- Aún más, ya que
$$S^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} S^k$$
y $S^k \subseteq S$, se sigue que $S^* \subseteq S$.
- Ahora observe que si $R \subseteq S$, entonces $R^* \subseteq S^*$, porque cualquier camino en R también es un camino en S.
- En consecuencia, $R^* \subseteq S^* \subseteq S$.

Cerradura Transitiva VI

- Suponga ahora que S es una relación transitiva que contiene R.
- Dado que S es transitiva, S^n también es transitiva (el lector debe verificarlo) y $S^n \subseteq S$ (según el Teorema 2 de las notas).
- Aún más, ya que
$$S^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} S^k$$
y $S^k \subseteq S$, se sigue que $S^* \subseteq S$.
- Ahora observe que si $R \subseteq S$, entonces $R^* \subseteq S^*$, porque cualquier camino en R también es un camino en S.
- En consecuencia, $R^* \subseteq S^* \subseteq S$.
- Por lo tanto, cualquier relación transitiva que contenga R también debe contener R^*.

Cerrada Transitiva VI

- Suponga ahora que S es una relación transitiva que contiene R.
- Dado que S es transitiva, S^n también es transitiva (el lector debe verificarlo) y $S^n \subseteq S$ (según el Teorema 2 de las notas).
- Aún más, ya que
$$S^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} S^k$$
y $S^k \subseteq S$, se sigue que $S^* \subseteq S$.
- Ahora observe que si $R \subseteq S$, entonces $R^* \subseteq S^*$, porque cualquier camino en R también es un camino en S.
- En consecuencia, $R^* \subseteq S^* \subseteq S$.
- Por lo tanto, cualquier relación transitiva que contenga R también debe contener R^*.
- Así, R^* es la cerradura transitiva de R. ■

Cerradura Transitiva VII

- Ahora que sabemos que la cerradura transitiva es igual a la relación de conectividad, dirigimos nuestra atención al problema de calcular esta relación.

Cerrada Transitiva VII

- No es necesario examinar trayectorias arbitrariamente largas para determinar si existe una trayectoria entre dos vértices en un grafo dirigido finito.

- Como muestra el Lema 1, es suficiente examinar caminos que no contengan más de n aristas, donde n es el número de elementos del conjunto.

Cerradura Transitiva VIII

Lema 1

Sea A un conjunto con n elementos, y sea R una relación sobre A. Si hay un camino de longitud al menos uno en R desde a hasta b, entonces existe un camino con una longitud que no excede a n. Además, cuando $a \neq b$, si hay un camino de longitud al menos uno en R desde a hasta b, entonces existe un camino con una longitud que no excede a $n - 1$.

Demostración:

Cerradura Transitiva VIII

Lema 1

Sea A un conjunto con n elementos, y sea R una relación sobre A. Si hay un camino de longitud al menos uno en R desde a hasta b, entonces existe un camino con una longitud que no excede a n. Además, cuando $a \neq b$, si hay un camino de longitud al menos uno en R desde a hasta b, entonces existe un camino con una longitud que no excede a $n - 1$.

Demostración:

- Suponga que hay un camino desde a hasta b en R.

Cerradura Transitiva VIII

Lema 1

Sea A un conjunto con n elementos, y sea R una relación sobre A. Si hay un camino de longitud al menos uno en R desde a hasta b, entonces existe un camino con una longitud que no excede a n. Además, cuando $a \neq b$, si hay un camino de longitud al menos uno en R desde a hasta b, entonces existe un camino con una longitud que no excede a $n - 1$.

Demostración:

- Suponga que hay un camino desde a hasta b en R.
- Sea m la longitud del camino más corto.

Lema 1

Sea A un conjunto con n elementos, y sea R una relación sobre A. Si hay un camino de longitud al menos uno en R desde a hasta b, entonces existe un camino con una longitud que no excede a n. Además, cuando $a \neq b$, si hay un camino de longitud al menos uno en R desde a hasta b, entonces existe un camino con una longitud que no excede a $n-1$.

Demostración:

- Suponga que hay un camino desde a hasta b en R.
- Sea m la longitud del camino más corto.
- Suponga que $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$, donde $x_0 = a$ y $x_m = b$, es ese camino.

Cerradura Transitiva VIII

Lema 1

Sea A un conjunto con n elementos, y sea R una relación sobre A. Si hay un camino de longitud al menos uno en R desde a hasta b, entonces existe un camino con una longitud que no excede a n. Además, cuando $a \neq b$, si hay un camino de longitud al menos uno en R desde a hasta b, entonces existe un camino con una longitud que no excede a $n - 1$.

Demostración:

- Suponga que hay un camino desde a hasta b en R.
- Sea m la longitud del camino más corto.
- Suponga que $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$, donde $x_0 = a$ y $x_m = b$, es ese camino.
- Suponga también que $a = b$ y que $m > n$, de modo que $m \geq n + 1$.

Cerradura Transitiva VIII

Lema 1

Sea A un conjunto con n elementos, y sea R una relación sobre A. Si hay un camino de longitud al menos uno en R desde a hasta b, entonces existe un camino con una longitud que no excede a n. Además, cuando $a \neq b$, si hay un camino de longitud al menos uno en R desde a hasta b, entonces existe un camino con una longitud que no excede a $n - 1$.

Demostración:

- Suponga que hay un camino desde a hasta b en R.
- Sea m la longitud del camino más corto.
- Suponga que $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$, donde $x_0 = a$ y $x_m = b$, es ese camino.
- Suponga también que $a = b$ y que $m > n$, de modo que $m \geq n + 1$.
- Por el principio del casillero, porque hay n vértices en A, entre los m vértices $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$, al menos dos son iguales (ver Figura 2).

Cerrada Transitiva IX

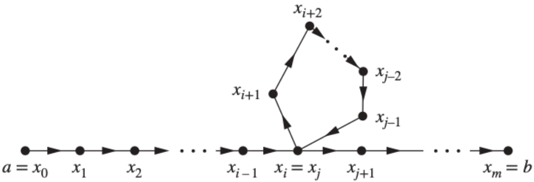


Figura 2: Produciendo un camino con longitud no mayor a n.

Cerradura Transitiva IX

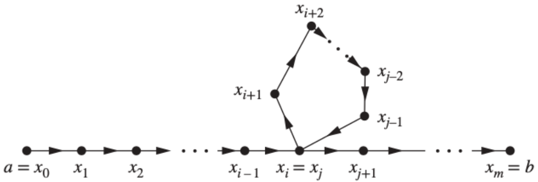


Figura 2: Produciendo un camino con longitud no mayor a n.

- Suponga que $x_i = x_j$ con $0 \leq i < j \leq m - 1$.

Cerradura Transitiva IX

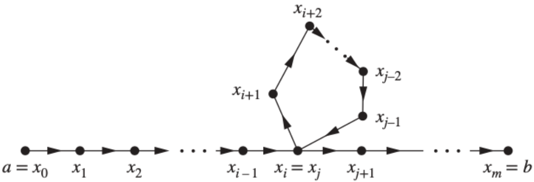


Figura 2: Produciendo un camino con longitud no mayor a n.

- Suponga que $x_i = x_j$ con $0 \leq i < j \leq m - 1$.
- Entonces, el camino contiene un circuito desde x_i a sí mismo.

Cerrada Transitiva IX

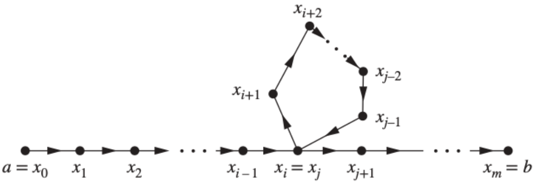


Figura 2: Produciendo un camino con longitud no mayor a n.

- Suponga que $x_i = x_j$ con $0 \leq i < j \leq m - 1$.
- Entonces, el camino contiene un circuito desde x_i a sí mismo.
- Este circuito se puede eliminar de la ruta de a a b, dejando una ruta, a saber, $x_0, x_1, \ldots, x_i, x_j + 1, \ldots, x_{m-1}, x_m$, de a a b de menor longitud.

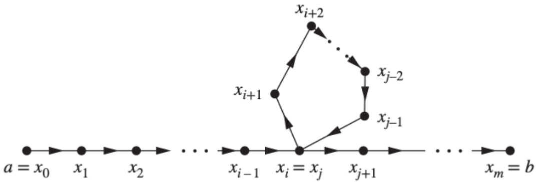


Figura 2: Produciendo un camino con longitud no mayor a n.

- Suponga que $x_i = x_j$ con $0 \leq i < j \leq m - 1$.
- Entonces, el camino contiene un circuito desde x_i a sí mismo.
- Este circuito se puede eliminar de la ruta de a a b, dejando una ruta, a saber, $x_0, x_1, \ldots, x_i, x_j + 1, \ldots, x_{m-1}, x_m$, de a a b de menor longitud.
- Por tanto, la ruta de menor longitud debe tener una longitud menor o igual que n. ∎

Cerradura Transitiva X

- Del Lema 1, vemos que la cerradura transitiva de R es la unión de $R, R^2, R^3, \ldots$ y R^n.

Cerrada Transitiva X

- Esto se debe a que hay una ruta en R^* entre dos vértices si y sólo si hay una ruta entre estos vértices en R^i, para algún entero positivo i con $i \leq n$.

- Porque

$$R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n$$

y la matriz cero-uno que representa una unión de relaciones es la unión de las matrices cero-uno de estas relaciones.

Cerradura Transitiva X

- La matriz cero-uno para la cerradura transitiva es la unión de las matrices cero-uno de las primeras n potencias de la matriz cero-uno de R.

Cerradura Transitiva XI

Teorema 3

Sea M_R la matriz cero-uno de la relación R sobre un conjunto con n elementos. Entonces la matriz cero-uno de la cerradura transitiva R^* es

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee \cdots \vee M_R^{[n]}.$$

■

Cerradura Transitiva XII

Ejemplo 7

Encuentre la matriz cero-uno de la cerradura transitiva de la relación R donde

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución: Por el Teorema 3, se sigue que la matriz cero-uno de R^* es

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]}$$

Cerradura Transitiva XIII

Dado que

$$M_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad M_R^{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

se sigue que

$$M_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Cerradura Transitiva XIV

- El Teorema 3 se puede utilizar como base para un algoritmo para calcular la matriz de la relación R^*.

Cerradura Transitiva XIV

- Para encontrar esta matriz, se calculan las sucesivas potencias booleanas de M_R, hasta la enésima potencia.

Cerradura Transitiva XIV

- A medida que se calcula cada potencia, se forma su unión con la unión de todas las potencias menores.

Cerrada Transitiva XIV

Cerradura Transitiva XIV

- Este procedimiento se muestra en la Figura 3.

procedure *transitive closure* ($\mathbf{M}_R$: zero–one $n \times n$ matrix)
$\mathbf{A} := \mathbf{M}_R$
$\mathbf{B} := \mathbf{A}$
for $i := 2$ **to** n
    $\mathbf{A} := \mathbf{A} \odot \mathbf{M}_R$
    $\mathbf{B} := \mathbf{B} \vee \mathbf{A}$
return $\mathbf{B}$\{$\mathbf{B}$ is the zero–one matrix for R^*\}

Figura 3: Un procedimiento para calcular la cerradura transitiva.

Ejercicios I

1. Sea R la relación del conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ que contiene los pares ordenados $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$ y $(3, 0)$. Encuentra la
    1. cerradura reflexiva de R.
    2. cerradura simétrica de R.
2. Sea R la relación $\{(a, b)|a \neq b\}$ en el conjunto de enteros. ¿Cuál es la cerradura reflexiva de R?
3. Dibuje el grafo dirigido de la cerradura reflexiva para cada una de las relaciones cuyos grafos dirigidos se muestran en la Figura 4.

Ejercicios II

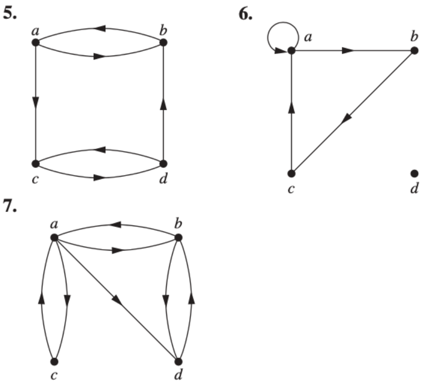


Figura 4: Grafos dirigidos para los Ejercicios 3 y 4.

4. Dibuje el grafo dirigido de la cerradura simétrica para cada una de las relaciones cuyos grafos dirigidos se muestran en la Figura 4.

Ejercicios III

5. Sea R la relación del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que contiene los pares ordenados $(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 1)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(5, 1)$, $(5, 2)$ y $(5, 4)$. Encuentre

   1. R^2.
   2. R^3.
   3. R^4.
   4. R^5.
   5. R^6.
   6. R^*.

6. Utilice el procedimiento de la Figura 3 para encontrar las Cerradura Transitiva de las siguientes relaciones sobre $\{1, 2, 3, 4\}$.
   1. $\{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$,
   2. $\{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$,
   3. $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$,
   4. $\{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 2)\}$.