Relaciones I

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Estructuras Discretas CCOS 009

Primavera 2021

Contenido

Motivación I

1. Las relaciones entre elementos de conjuntos ocurren en muchos contextos.

Motivación I

2. Todos los días tratamos con relaciones como las que existen entre una empresa y su número de teléfono, un empleado y su salario, una persona y un familiar, etc.

Motivación I

3. En matemáticas estudiamos relaciones como las que existen entre un número entero positivo y otro que divide, un número entero y otro que es congruente con módulo 5, un número real y otro mayor que él, un número real x y el valor $f(x)$ donde f es una función, y así sucesivamente.

Motivación I

4. Relaciones como la que existe entre un programa y una variable que utiliza, y la que existe entre un lenguaje de programación y una declaración válida en este lenguaje, surgen a menudo en las ciencias de la computación.

Motivación II

- Las relaciones entre elementos de dos conjuntos se representan mediante la estructura denominada relación binaria, que es sólo un subconjunto del producto cartesiano de los conjuntos.

Motivación II

- Las relaciones se pueden utilizar para resolver problemas tales como determinar qué pares de ciudades están vinculadas por vuelos de aerolíneas en una red o encontrar un orden viable para las diferentes fases de un proyecto complicado.

Motivación II

- Introduciremos una serie de propiedades diferentes que pueden disfrutar las relaciones binarias.

Relaciones binarias I

- La forma más directa de expresar una relación entre elementos de dos conjuntos es utilizar pares ordenados formados por dos elementos relacionados.

- Por esta razón, los conjuntos de pares ordenados se denominan relaciones binarias.

Relaciones binarias I

- En esta sección presentamos la terminología básica utilizada para describir las relaciones binarias.

Definición 1

Sean A y B conjuntos. Una *relación binaria* de A a B es un subconjunto de $A \times B$.

Relaciones binarias II

- En otras palabras, una relación binaria de A a B es un conjunto R de pares ordenados, donde el primer elemento de cada par ordenado proviene de A y el segundo elemento proviene de B.

Relaciones binarias II

- Usamos la notación aRb para denotar que $(a, b) \in R$ y $a \not R b$ para denotar que $(a, b) \notin R$. Además, cuando (a, b) pertenece a R, se dice que a está **relacionado** con b mediante R.

Relaciones binarias II

- Las relaciones binarias representan relaciones entre los elementos de dos conjuntos. Introduciremos relaciones $n-$arias, que expresan relaciones entre elementos de más de dos conjuntos, más adelante en este capítulo.

Relaciones binarias II

- Omitiremos la palabra "binario" cuando no haya peligro de confusión.

Ejemplo 1

Ejemplo 1

Sea A el conjunto de estudiantes de su escuela y B el conjunto de cursos. Sea R la relación que consta de aquellos pares (a, b), donde a es un estudiante matriculado en el curso b.

Ejemplo 1

Ejemplo 1

Sea A el conjunto de estudiantes de su escuela y B el conjunto de cursos. Sea R la relación que consta de aquellos pares (a, b), donde a es un estudiante matriculado en el curso b.

- Por ejemplo, si Jason Goodfriend y Deborah Sherman están inscritos en CS518, las parejas (Jason Goodfriend, CS518) y (Deborah Sherman, CS518) pertenecen a R.

Ejemplo 1

Sea A el conjunto de estudiantes de su escuela y B el conjunto de cursos. Sea R la relación que consta de aquellos pares (a, b), donde a es un estudiante matriculado en el curso b.

- Si Jason Goodfriend también está inscrito en CS510, entonces la pareja (Jason Goodfriend, CS510) también está en R.

Ejemplo 1

Ejemplo 1

Sea A el conjunto de estudiantes de su escuela y B el conjunto de cursos. Sea R la relación que consta de aquellos pares (a, b), donde a es un estudiante matriculado en el curso b.

- Sin embargo, si Deborah Sherman no está inscrita en CS510, entonces la pareja (Deborah Sherman, CS510) no está en R.

Ejemplo 1

Ejemplo 1

Sea A el conjunto de estudiantes de su escuela y B el conjunto de cursos. Sea R la relación que consta de aquellos pares (a, b), donde a es un estudiante matriculado en el curso b.

- Tenga en cuenta que si un estudiante no está inscrito actualmente en ningún curso, no habrá pares en R que tengan a este estudiante como primer elemento.

Ejemplo 1

Sea A el conjunto de estudiantes de su escuela y B el conjunto de cursos. Sea R la relación que consta de aquellos pares (a, b), donde a es un estudiante matriculado en el curso b.

- Del mismo modo, si un curso no se ofrece actualmente, no habrá pares en R que tengan este curso como segundo elemento.

Ejemplo 2

Ejemplo 2

Sea A el conjunto de ciudades de EE. UU. Y B el conjunto de los 50 estados de EE. UU. Defina la relación R especificando que (a, b) pertenece a R si una ciudad con el nombre a está en el estado b .

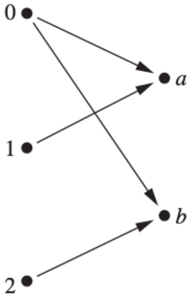
Por ejemplo, (Boulder, Colorado), (Bangor, Maine), (Ann Arbor, Michigan), (Middletown, Nueva Jersey), (Middletown, Nueva York), (Cupertino, California) y (Red Bank, Nueva Jersey) están en R. $\square$

Ejemplo 3

Ejemplo 3

Sean $A = \{0, 1, 2\}$ y $B = \{a, b\}$. Entonces una relación de A a B es $\{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$.

Esto significa, por ejemplo, que $0Ra$, pero que $1 \not R b$.



R	a	b
0	×	×
1	×	
2		×

Figura 1: Mostrando los pares ordenados en la relación R del Ejemplo 3.

Definición 2

Una relación sobre un conjunto A es una relación de A a A.

En otras palabras, una relación sobre un conjunto A es un subconjunto de $A \times A$.

Ejemplo 4

Sea A el conjunto $\{1,2,3,4\}$. ¿Qué pares ordenados están en la relación $R = \{(a,b) | a \text{ divide a } b\}$?

Ejemplo 4

Sea A el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. ¿Qué pares ordenados están en la relación $R = \{(a, b) | a \text{ divide a } b\}$?

Solución: Debido a que (a, b) está en R si y sólo si a y b son números enteros positivos que no excedan 4 tales que a divide a b, vemos que

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}.$$

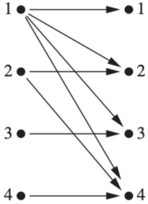
Ejemplo 4

Ejemplo 4

Sea A el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. ¿Qué pares ordenados están en la relación $R = \{(a, b) | a \text{ divide a } b\}$?

Solución: Debido a que (a, b) está en R si y sólo si a y b son números enteros positivos que no excedan 4 tales que a divide a b, vemos que

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}.$$



R	1	2	3	4
1	×	×	×	×
2		×		×
3			×	
4				×

Figura 2: Mostrando los pares ordenados en la relación R del Ejemplo 4.

Ejemplo 5 I

Ejemplo 5

Considere las siguientes relaciones sobre el conjunto de enteros:

$$
\begin{aligned}
R_1 =& \{(a,b) | a \leq b\}, \\
R_2 =& \{(a,b) | a > b\}, \\
R_3 =& \{(a,b) | a = b \text{ o } a = -b\}, \\
R_4 =& \{(a,b) | a = b\}, \\
R_5 =& \{(a,b) | a = b + 1\}, \\
R_6 =& \{(a,b) | a + b \leq 3\}.
\end{aligned}
$$

¿Cuáles de estas relaciones contienen cada uno de los pares $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(1,-1)$ y $(2,2)$?

Ejemplo 5 II

$$\begin{aligned}
R_1 =& \{(a,b) | a \leq b\},\\
R_2 =& \{(a,b) | a > b\},\\
R_3 =& \{(a,b) | a = b \text{ o } a = -b\},\\
R_4 =& \{(a,b) | a = b\},\\
R_5 =& \{(a,b) | a = b + 1\},\\
R_6 =& \{(a,b) | a + b \leq 3\}.
\end{aligned}$$

Solución: El par $(1,1)$ está en R_1, R_3, R_4 y R_6; $(1,2)$ está en R_1 y R_6; $(2,1)$ está en R_2, R_5 y R_6; $(1,-1)$ está en R_2, R_3 y R_6; y finalmente, $(2,2)$ está en R_1, R_3 y R_4. □

Ejemplo 6

Ejemplo 6

¿Cuántas relaciones hay en un conjunto con n elementos?

Ejemplo 6

¿Cuántas relaciones hay en un conjunto con n elementos?

Solución:

$\square$

Ejemplo 6

¿Cuántas relaciones hay en un conjunto con n elementos?

Solución:

- Una relación sobre un conjunto A es un subconjunto de $A \times A$.

$\square$

Ejemplo 6

¿Cuántas relaciones hay en un conjunto con n elementos?

Solución:

- Una relación sobre un conjunto A es un subconjunto de $A \times A$.
- Como $A \times A$ tiene n^2 elementos cuando A tiene n elementos, y un conjunto con m elementos tiene 2^m subconjuntos, hay 2^{n^2} subconjuntos de $A \times A$.

$\square$

Ejemplo 6

¿Cuántas relaciones hay en un conjunto con n elementos?

Solución:

- Una relación sobre un conjunto A es un subconjunto de $A \times A$.
- Como $A \times A$ tiene n^2 elementos cuando A tiene n elementos, y un conjunto con m elementos tiene 2^m subconjuntos, hay 2^{n^2} subconjuntos de $A \times A$.
- Por lo tanto, hay 2^{n^2} relaciones en un conjunto con n elementos.

$\square$

Ejemplo 6

¿Cuántas relaciones hay en un conjunto con n elementos?

Solución:

- Una relación sobre un conjunto A es un subconjunto de $A \times A$.
- Como $A \times A$ tiene n^2 elementos cuando A tiene n elementos, y un conjunto con m elementos tiene 2^m subconjuntos, hay 2^{n^2} subconjuntos de $A \times A$.
- Por lo tanto, hay 2^{n^2} relaciones en un conjunto con n elementos.
- Por ejemplo, hay $2^{3^2} = 2^9 = 512$ relaciones sobre el conjunto $\{a, b, c\}$.

$\square$

Propiedad Reflexiva I

- Hay varias propiedades que se utilizan para clasificar relaciones en un conjunto.

Propiedad Reflexiva I

- Aquí presentaremos las más importantes.

Propiedad Reflexiva I

- En algunas relaciones, un elemento siempre está relacionado consigo mismo.

Propiedad Reflexiva I

- Por ejemplo, sea R la relación en el conjunto de todas las personas que consta de parejas (x, y) donde x y y tienen la misma madre y el mismo padre. Entonces xRx para cada persona x.

Propiedad Reflexiva II

Definición 3

Una relación R sobre un conjunto A se llama *reflexiva* si $(a, a) \in R$ para cada elemento $a \in A$.

Propiedad Reflexiva II

Definición 3

Una relación R sobre un conjunto A se llama *reflexiva* si $(a, a) \in R$ para cada elemento $a \in A$.

Observación 1

Usando cuantificadores vemos que la relación R sobre el conjunto A es reflexiva si $\forall a((a, a) \in R)$, donde el universo de discurso es el conjunto de todos los elementos en A.

Ejemplo 7

Considere las siguientes relaciones sobre $\{1, 2, 3, 4\}$:

$$
\begin{aligned}
R_1 =& \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\},\\
R_2 =& \{(1,1),(1,2),(2,1)\},\\
R_3 =& \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\},\\
R_4 =& \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\},\\
R_5 =& \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\},\\
R_6 =& \{(3,4)\}.
\end{aligned}
$$

¿Cuáles de estas relaciones son reflexivas?

Ejemplo 7 II

$$\begin{aligned}
R_1 =&\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\},\\
R_2 =&\{(1,1),(1,2),(2,1)\},\\
R_3 =&\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\},\\
R_4 =&\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\},\\
R_5 =&\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\},\\
R_6 =&\{(3,4)\}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 7 II

$$\begin{aligned}
R_1 =&\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\},\\
R_2 =&\{(1,1),(1,2),(2,1)\},\\
R_3 =&\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\},\\
R_4 =&\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\},\\
R_5 =&\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\},\\
R_6 =&\{(3,4)\}.
\end{aligned}$$

Solución:

Ejemplo 7 II

$$
\begin{aligned}
R_1 =&\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\},\\
R_2 =&\{(1,1),(1,2),(2,1)\},\\
R_3 =&\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\},\\
R_4 =&\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\},\\
R_5 =&\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\},\\
R_6 =&\{(3,4)\}.
\end{aligned}
$$

Solución:

- Las relaciones R_3 y R_5 son reflexivas porque ambas contienen todos los pares de la forma (a, a), a saber, $(1,1),(2,2),(3,3)$ y $(4,4)$.

Ejemplo 7 II

$$
\begin{aligned}
R_1 =&\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\},\\
R_2 =&\{(1,1),(1,2),(2,1)\},\\
R_3 =&\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\},\\
R_4 =&\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\},\\
R_5 =&\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\},\\
R_6 =&\{(3,4)\}.
\end{aligned}
$$

Solución:

- Las otras relaciones no son reflexivas porque no contienen todos estos pares ordenados.

Ejemplo 7 II

$$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\},$$
$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\},$$
$$R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\},$$
$$R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\},$$
$$R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\},$$
$$R_6 = \{(3,4)\}.$$

Solución:

- En particular, R_1, R_2, R_4 y R_6 no son reflexivos porque $(3,3)$ no se encuentra en ninguna de estas relaciones. $\square$

Ejemplo 8

Ejemplo 8

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 5 son reflexivas?

Ejemplo 8

Ejemplo 8

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 5 son reflexivas?

Solución:

$\square$

Ejemplo 8

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 5 son reflexivas?

Solución:

- Las relaciones reflexivas del ejemplo 5 son R_1 (porque $a \leq a$ para todo entero a, R_3 y R_4.

$\square$

Ejemplo 8

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 5 son reflexivas?

Solución:

- Para cada una de las otras relaciones en este ejemplo, es fácil encontrar un par de la forma (a, a) que no está en la relación.

$\square$

Ejemplo 9

¿Es reflexiva la relación "divide" en el conjunto de enteros positivos?

Ejemplo 9

¿Es reflexiva la relación “divide” en el conjunto de enteros positivos?

Solución:

□

Ejemplo 9

Ejemplo 9

¿Es reflexiva la relación “divide” en el conjunto de enteros positivos?

Solución:

- Como $a|a$ siempre que a es un número entero positivo, la relación “divide” es reflexiva.

$\square$

Ejemplo 9

¿Es reflexiva la relación "divide" en el conjunto de enteros positivos?

Solución:

- Tenga en cuenta que si reemplazamos el conjunto de enteros positivos con el conjunto de todos los enteros, la relación no es reflexiva porque, por definición, 0 no divide a 0.

□

Propiedad Simétrica I

- En algunas relaciones, un elemento está relacionado con un segundo elemento si y sólo si el segundo elemento también está relacionado con el primer elemento.

Propiedad Simétrica I

- La relación que consiste en pares (x, y), donde x y y son estudiantes en su escuela con al menos una clase común tiene esta propiedad.

Propiedad Simétrica I

- Otras relaciones tienen la propiedad de que si un elemento está relacionado con un segundo elemento, este segundo elemento no está relacionado con el primero.

Propiedad Simétrica I

- La relación que consta de los pares (x, y), donde x y y son estudiantes en su escuela, donde x tiene un promedio de calificaciones más alto que y tiene esta propiedad.

Propiedad Simétrica II

Definición 4

Una relación R sobre un conjunto A se llama *simétrica* si $(b, a) \in R$ siempre que $(a, b) \in R$, para todo $a, b \in A$. Una relación R sobre un conjunto A tal que para todo $a, b \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$, entonces $a = b$ se llama *antisimétrica*.

Propiedad Simétrica II

Definición 4

Una relación R sobre un conjunto A se llama *simétrica* si $(b, a) \in R$ siempre que $(a, b) \in R$, para todo $a, b \in A$. Una relación R sobre un conjunto A tal que para todo $a, b \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$, entonces $a = b$ se llama *antisimétrica*.

Observación 2

Usando cuantificadores, vemos que la relación R sobre el conjunto A es simétrica si $\forall a \forall b((a, b) \in R \to (b, a) \in R)$. De manera similar, la relación R sobre el conjunto A es antisimétrica si
$\forall a \forall b(((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \to (a = b))$.

Propiedad Simétrica III

- En otras palabras, una relación es simétrica si y sólo si a está relacionada con b siempre implica que b está relacionada con a.

Propiedad Simétrica III

- Por ejemplo, la relación de igualdad es simétrica porque $a = b$ si y sólo si $b = a$.

Propiedad Simétrica III

- Una relación es antisimétrica si y sólo si no hay pares de elementos distintos a y b con a relacionado con b y b relacionados con a.

Propiedad Simétrica III

- Es decir, la única forma de tener a relacionado con b y b relacionado con a es que a y b sean el mismo elemento.

Propiedad Simétrica III

- Por ejemplo, la relación menor o igual a es antisimétrica, para ver esto, tenga en cuenta que $a \leq b$ y $b \leq a$ implica que $a = b$.

Propiedad Simétrica III

- Los términos simétrico y antisimétrico no son opuestos, porque una relación puede tener estas dos propiedades o puede carecer de ambas.

Propiedad Simétrica III

- Una relación no puede ser simétrica y antisimétrica si contiene algún par de la forma (a, b) en la que $a \neq b$.

Ejemplo 10 I

Ejemplo 10

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Ejemplo 10 I

Ejemplo 10

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

Ejemplo 10

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

- Las relaciones R_2 y R_3 son simétricas, porque en cada caso (b, a) pertenece a la relación siempre que (a, b) lo hace.

Ejemplo 10 I

Ejemplo 10

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

- Para R_2, lo único que se debe verificar es que tanto $(2,1)$ como $(1,2)$ están en la relación.

Ejemplo 10 I

Ejemplo 10

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

- Para R_3, es necesario comprobar que tanto $(1, 2)$ como $(2, 1)$ pertenecen a la relación, y también $(1, 4)$ y $(4, 1)$ pertenecen a la relación.

Ejemplo 10 I

Ejemplo 10

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

- El lector debe verificar que ninguna de las otras relaciones sean simétricas.

Ejemplo 10

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

- Esto se hace encontrando un par (a, b) tal que esté en la relación pero (b, a) no lo esté.

Ejemplo 10 II

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Ejemplo 10 II

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

Ejemplo 10 II

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

- R_4, R_5 y R_6 son todas antisimétricas.

Ejemplo 10 II

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

- Para cada una de estas relaciones no hay un par de elementos a y b con $a \neq b$ tal que tanto (a, b) como (b, a) pertenezcan a la relación.

Ejemplo 10 II

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son simétricas y cuáles antisimétricas?
Solución:

- El lector debe verificar que ninguna de las otras relaciones sean antisimétricas.

Ejemplo 10 II

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

- Esto se hace encontrando un par (a, b) con $a \neq b$ tal que (a, b) y (b, a) estén ambos en la relación. $\square$

Ejemplo 11

¿Cuáles de las relaciones del Ejemplo 5 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Ejemplo 11

¿Cuáles de las relaciones del Ejemplo 5 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

Ejemplo 11 I

Ejemplo 11

¿Cuáles de las relaciones del Ejemplo 5 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

- Las relaciones R_3, R_4 y R_6 son simétricas.

Ejemplo 11 I

Ejemplo 11

¿Cuáles de las relaciones del Ejemplo 5 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

- R_3 es simétrica, porque si $a = b$ o $a = -b$, entonces $b = a$ o $b = -a$.

Ejemplo 11 I

Ejemplo 11

¿Cuáles de las relaciones del Ejemplo 5 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

- R_4 es simétrica porque $a = b$ implica que $b = a$.

Ejemplo 11 I

Ejemplo 11

¿Cuáles de las relaciones del Ejemplo 5 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

- R_6 es simétrica porque $a + b \leq 3$ implica que $b + a \leq 3$.

Ejemplo 11 I

Ejemplo 11

¿Cuáles de las relaciones del Ejemplo 5 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

- El lector debe verificar que ninguna de las otras relaciones sea simétrica.

Ejemplo 11 II

¿Cuáles de las relaciones del Ejemplo 5 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Ejemplo 11 II

¿Cuáles de las relaciones del Ejemplo 5 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

Ejemplo 11 II

¿Cuáles de las relaciones del Ejemplo 5 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

- Las relaciones R_1, R_2, R_4 y R_5 son antisimétricas.

Ejemplo 11 II

¿Cuáles de las relaciones del Ejemplo 5 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

- R_1 es antisimétrica porque las desigualdades $a \leq b$ y $b \leq a$ implican que $a = b$.

Ejemplo 11 II

¿Cuáles de las relaciones del Ejemplo 5 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

- R_2 es antisimétrica porque es imposible que $a > b$ y $b > a$.

Ejemplo 11 II

¿Cuáles de las relaciones del Ejemplo 5 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

- R_4 es antisimétrica, porque dos elementos están relacionados con respecto a R_4 si y sólo si son iguales.

Ejemplo 11 II

¿Cuáles de las relaciones del Ejemplo 5 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución:

- R_5 es antisimétrica porque es imposible que $a = b + 1$ y $b = a + 1$.

Ejemplo 11 II

¿Cuáles de las relaciones del Ejemplo 5 son simétricas y cuáles antisimétricas?
Solución:

- El lector debe verificar que ninguna de las otras relaciones sea antisimétrica. □

Ejemplo 12

Ejemplo 12

¿Es simétrica la relación "divide" en el conjunto de enteros positivos? ¿Es antisimétrica?

Ejemplo 12

Ejemplo 12

¿Es simétrica la relación "divide" en el conjunto de enteros positivos? ¿Es antisimétrica?

Solución:

Ejemplo 12

Ejemplo 12

¿Es simétrica la relación "divide" en el conjunto de enteros positivos? ¿Es antisimétrica?

Solución:

- Esta relación no es simétrica porque $1|2$, pero $2 \not| 1$.

Ejemplo 12

Ejemplo 12

¿Es simétrica la relación “divide” en el conjunto de enteros positivos? ¿Es antisimétrica?

Solución:

- Sin embargo, es antisimétrica.

Ejemplo 12

Ejemplo 12

¿Es simétrica la relación "divide" en el conjunto de enteros positivos? ¿Es antisimétrica?

Solución:

- Para ver esto, tenga en cuenta que si a y b son números enteros positivos con $a|b$ y $b|a$, entonces $a = b$.

Propiedad Transitiva I

- Sea R la relación que consta de todos los pares (x, y) de estudiantes de su escuela, donde x ha obtenido más créditos que y.
- Suponga que x está relacionado con y y y está relacionado con z. Esto significa que x ha obtenido más créditos que y y y ha obtenido más créditos que z. Podemos concluir que x ha tomado más créditos que z, por lo que x está relacionado con z. Lo que hemos demostrado es que R tiene la propiedad transitiva, que se define como sigue.

Propiedad Transitiva II

Definición 5

Una relación R sobre un conjunto A se llama *transitiva* si siempre que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R$, para todo $a, b, c \in A$.

Propiedad Transitiva II

Definición 5

Una relación R sobre un conjunto A se llama *transitiva* si siempre que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R$, para todo $a, b, c \in A$.

Observación 3

Usando cuantificadores vemos que la relación R sobre un conjunto A es transitiva si tenemos

$$\forall a \forall b \forall c(((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \rightarrow (a, c) \in R).$$

Ejemplo 13

Ejemplo 13

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son transitivas?

Ejemplo 13

Ejemplo 13

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son transitivas?

Solución:

Ejemplo 13

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son transitivas?

Solución:

- R_4 es transitiva, porque $(3,2)$ y $(2,1)$; $(4,2)$ y $(2,1)$; $(4,3)$ y $(3,1)$; además de $(4,3)$ y $(3,2)$ son los únicos conjuntos de pares de este tipo, y $(3,1),(4,1)$ y $(4,2)$ pertenecen a R_4.

Ejemplo 13

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son transitivas?

Solución:

- El lector debe verificar que R_5 y R_6 sean transitivas.

Ejemplo 13

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son transitivas?

Solución:

- R_1 no es transitiva porque $(3,4)$ y $(4,1)$ pertenecen a R_1, pero $(3,1)$ no.

Ejemplo 13

Ejemplo 13

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son transitivas?

Solución:

- R_2 no es transitiva porque $(2,1)$ y $(1,2)$ pertenecen a R_2, pero $(2,2)$ no.

Ejemplo 13

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son transitivas?

Solución:

- R_3 no es transitiva porque $(4, 1)$ y $(1, 2)$ pertenecen a R_3, pero $(4, 2)$ no. $\square$

Ejemplo 14

Ejemplo 14

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 5 son transitivas?

Ejemplo 14

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 5 son transitivas?

Solución:

Ejemplo 14

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 5 son transitivas?

Solución:

- R_1 es transitiva porque $a \leq b$ y $b \leq c$ implican que $a \leq c$.

Ejemplo 14

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 5 son transitivas?

Solución:

- R_2 es transitiva porque $a > b$ y $b > c$ implican que $a > c$.

Ejemplo 14

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 5 son transitivas?

Solución:

- R_3 es transitiva porque $a = \pm b$ y $b = \pm c$ implican que $a = \pm c$.

Ejemplo 14

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 5 son transitivas?

Solución:

- R_4 es claramente transitiva, como debe verificar el lector.

Ejemplo 14

Ejemplo 14

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 5 son transitivas?

Solución:

- R_5 no es transitiva porque $(2,1)$ y $(1,0)$ pertenecen a R_5, pero $(2,0)$ no.

Ejemplo 14

Ejemplo 14

¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 5 son transitivas?

Solución:

- R_6 no es transitiva porque $(2,1)$ y $(1,2)$ pertenecen a R_6, pero $(2,2)$ no. $\square$

Ejemplo 15

Ejemplo 15

¿Es la relación "divide" en el conjunto de enteros positivos transitiva?

Ejemplo 15

Ejemplo 15

¿Es la relación "divide" en el conjunto de enteros positivos transitiva?

Solución:

Ejemplo 15

Ejemplo 15

¿Es la relación “divide” en el conjunto de enteros positivos transitiva?

Solución:

- Suponga que a divide a b y b divide a c.

Ejemplo 15

Ejemplo 15

¿Es la relación “divide” en el conjunto de enteros positivos transitiva?

Solución:

- Suponga que a divide a b y b divide a c.
- Entonces hay enteros positivos k y l tales que $b = ak$ y $c = bl$.

Ejemplo 15

Ejemplo 15

¿Es la relación "divide" en el conjunto de enteros positivos transitiva?

Solución:

- Suponga que a divide a b y b divide a c.
- Entonces hay enteros positivos k y l tales que $b = ak$ y $c = bl$.
- Por lo tanto, $c = a(kl)$, entonces a divide a c.

Ejemplo 15

¿Es la relación "divide" en el conjunto de enteros positivos transitiva?

Solución:

- Suponga que a divide a b y b divide a c.
- Entonces hay enteros positivos k y l tales que $b = ak$ y $c = bl$.
- Por lo tanto, $c = a(kl)$, entonces a divide a c.
- De ello se deduce que esta relación es transitiva.

Combinando Relaciones

Debido a que las relaciones de A a B son subconjuntos de $A \times B$, dos relaciones de A a B se pueden combinar de cualquier manera que se puedan combinar dos conjuntos.

Ejemplo 16

Ejemplo 16

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Las relaciones $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ y $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ se pueden combinar para obtener

Ejemplo 16

Ejemplo 16

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Las relaciones $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ y $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ se pueden combinar para obtener

$$R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\},$$

Ejemplo 16

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Las relaciones $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ y $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ se pueden combinar para obtener

$$
\begin{aligned}
R_1 \cup R_2 =& \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}, \\
R_1 \cap R_2 =& \{(1, 1)\},
\end{aligned}
$$

Ejemplo 16

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Las relaciones $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ y $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ se pueden combinar para obtener

$$
\begin{aligned}
R_1 \cup R_2 =& \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\},\\
R_1 \cap R_2 =& \{(1, 1)\},\\
R_1 - R_2 =& \{(2, 2), (3, 3)\},
\end{aligned}
$$

Ejemplo 16

Ejemplo 16

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Las relaciones $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ y $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ se pueden combinar para obtener

$$\begin{aligned}
R_1 \cup R_2 =& \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\},\\
R_1 \cap R_2 =& \{(1, 1)\},\\
R_1 - R_2 =& \{(2, 2), (3, 3)\},\\
R_2 - R_1 =& \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 17 I

Ejemplo 17

- Sean A y B el conjunto de todos los estudiantes y el conjunto de todos los cursos de una escuela, respectivamente.

Ejemplo 17 I

Ejemplo 17

- Sean A y B el conjunto de todos los estudiantes y el conjunto de todos los cursos de una escuela, respectivamente.
- Suponga que R_1 consta de todos los pares ordenados (a, b), donde a es un estudiante que ha tomado el curso b,

Ejemplo 17

- Sean A y B el conjunto de todos los estudiantes y el conjunto de todos los cursos de una escuela, respectivamente.
- Suponga que R_1 consta de todos los pares ordenados (a, b), donde a es un estudiante que ha tomado el curso b,
- y R_2 consta de todos los pares ordenados (a, b), donde a es un estudiante que requiere el curso b para graduarse.

Ejemplo 17

- Sean A y B el conjunto de todos los estudiantes y el conjunto de todos los cursos de una escuela, respectivamente.
- Suponga que R_1 consta de todos los pares ordenados (a, b), donde a es un estudiante que ha tomado el curso b,
- y R_2 consta de todos los pares ordenados (a, b), donde a es un estudiante que requiere el curso b para graduarse.
- ¿Cuáles son las relaciones $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \oplus R_2$, $R_1 - R_2$ y $R_2 - R_1$?

Ejemplo 17 II

Solución:

Ejemplo 17 II

Solución:

- La relación $R_1 \cup R_2$ consta de todos los pares ordenados (a, b), donde a es un estudiante que ha tomado el curso b o necesita el curso b para graduarse.

Ejemplo 17 II

Solución:

- $R_1 \cap R_2$ es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b), donde a es un estudiante que ha tomado el curso b y necesita este curso para graduarse.

Ejemplo 17 II

Solución:

- $R_1 \oplus R_2$ consta de todos los pares ordenados (a, b), donde el estudiante a ha tomado el curso b pero no lo necesita para graduarse o necesita el curso b para graduarse pero no lo ha tomado.

Ejemplo 17 II

Solución:

- $R_1 - R_2$ es el conjunto de pares ordenados (a, b), donde a ha tomado el curso b pero no lo necesita para graduarse; es decir, b es un curso electivo que ha tomado a.

Ejemplo 17 II

Solución:

- $R_2 - R_1$ es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b), donde b es un curso que a necesita para graduarse pero que no lo ha tomado. $\square$

Ejemplo 18 I

Ejemplo 18

Sea R_1 la relación menor que en el conjunto de números reales y sea R_2 la relación mayor que en el conjunto de números reales, es decir, $R_1 = \{(x, y) | x < y\}$ y $R_2 = \{(x, y) | x > y\}$. ¿Cuáles son $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$, $R_2 - R_1$ y $R_1 \oplus R_2$?

Ejemplo 18 I

Ejemplo 18

Sea R_1 la relación menor que en el conjunto de números reales y sea R_2 la relación mayor que en el conjunto de números reales, es decir, $R_1 = \{(x, y)|x < y\}$ y $R_2 = \{(x, y)|x > y\}$. ¿Cuáles son $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$, $R_2 - R_1$ y $R_1 \oplus R_2$?

Solución:

Ejemplo 18

Sea R_1 la relación menor que en el conjunto de números reales y sea R_2 la relación mayor que en el conjunto de números reales, es decir, $R_1 = \{(x, y)|x < y\}$ y $R_2 = \{(x, y)|x > y\}$. ¿Cuáles son $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$, $R_2 - R_1$ y $R_1 \oplus R_2$?

Solución:

- Observamos que $(x, y) \in R_1 \cup R_2$ si y sólo si $(x, y) \in R_1$ o $(x, y) \in R_2$.

Ejemplo 18

Sea R_1 la relación menor que en el conjunto de números reales y sea R_2 la relación mayor que en el conjunto de números reales, es decir, $R_1 = \{(x, y)|x < y\}$ y $R_2 = \{(x, y)|x > y\}$. ¿Cuáles son $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$, $R_2 - R_1$ y $R_1 \oplus R_2$?

Solución:

- Observamos que $(x, y) \in R_1 \cup R_2$ si y sólo si $(x, y) \in R_1$ o $(x, y) \in R_2$.
- Por lo tanto, $(x, y) \in R_1 \cup R_2$ si y sólo si $x < y$ o $x > y$.

Ejemplo 18

Sea R_1 la relación menor que en el conjunto de números reales y sea R_2 la relación mayor que en el conjunto de números reales, es decir, $R_1 = \{(x, y)|x < y\}$ y $R_2 = \{(x, y)|x > y\}$. ¿Cuáles son $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$, $R_2 - R_1$ y $R_1 \oplus R_2$?

Solución:

- Observamos que $(x, y) \in R_1 \cup R_2$ si y sólo si $(x, y) \in R_1$ o $(x, y) \in R_2$.
- Por lo tanto, $(x, y) \in R_1 \cup R_2$ si y sólo si $x < y$ o $x > y$.
- Debido a que la condición $x < y$ o $x > y$ es la misma que la condición $x \neq y$, se sigue que $R_1 \cup R_2 = \{(x, y)|x \neq y\}$.

Ejemplo 18

Sea R_1 la relación menor que en el conjunto de números reales y sea R_2 la relación mayor que en el conjunto de números reales, es decir, $R_1 = \{(x, y)|x < y\}$ y $R_2 = \{(x, y)|x > y\}$. ¿Cuáles son $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$, $R_2 - R_1$ y $R_1 \oplus R_2$?

Solución:

- Observamos que $(x, y) \in R_1 \cup R_2$ si y sólo si $(x, y) \in R_1$ o $(x, y) \in R_2$.
- Por lo tanto, $(x, y) \in R_1 \cup R_2$ si y sólo si $x < y$ o $x > y$.
- Debido a que la condición $x < y$ o $x > y$ es la misma que la condición $x \neq y$, se sigue que $R_1 \cup R_2 = \{(x, y)|x \neq y\}$.
- En otras palabras, la unión de la relación menor que y la relación mayor que es la relación no iguales.

- Observe que es imposible que un par (x, y) pertenezca tanto a R_1 como a R_2 porque es imposible que $x < y$ y $x > y$.

Ejemplo 18 II

- De ello se deduce que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$.

Ejemplo 18 II

- $R_1 - R_2 = R_1$.

Ejemplo 18 II

- $R_2 - R_1 = R_2$.

Ejemplo 18 II

- $R_1 \oplus R_2 = R_1 \cup R_2 - R_1 \cap R_2 = \{(x, y) | x \neq y\}$. $\square$

Composición de Relaciones

Definición 6

Sea R una relación de un conjunto A en un conjunto B y S una relación de B en un conjunto C. La *composición* de R y S es la relación que consta de pares ordenados (a, c), donde $a \in A$, $c \in C$, y para el cual existe un elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in S$. Denotamos la composición de R y S por $S \circ R$.

Ejemplo 19 I

Ejemplo 19

¿Cuál es la composición de las relaciones R y S?, donde R es la relación de $\{1, 2, 3\}$ a $\{1, 2, 3, 4\}$ y S es la relación de $\{1, 2, 3, 4\}$ a $\{0, 1, 2\}$ con:

$$R =\{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$$
$$S =\{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

Ejemplo 19

¿Cuál es la composición de las relaciones R y S?, donde R es la relación de $\{1, 2, 3\}$ a $\{1, 2, 3, 4\}$ y S es la relación de $\{1, 2, 3, 4\}$ a $\{0, 1, 2\}$ con:

$$
\begin{aligned}
R =& \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\} \\
S =& \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}
\end{aligned}
$$

Solución:

Ejemplo 19 I

Ejemplo 19

¿Cuál es la composición de las relaciones R y S?, donde R es la relación de $\{1,2,3\}$ a $\{1,2,3,4\}$ y S es la relación de $\{1,2,3,4\}$ a $\{0,1,2\}$ con:

$$\begin{aligned} R =& \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\} \\ S =& \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\} \end{aligned}$$

Solución:

- $S \circ R$ se construye utilizando todos los pares ordenados en R y los pares ordenados en S, donde el segundo elemento del par ordenado en R concuerda con el primer elemento del par ordenado en S.

Ejemplo 19 I

Ejemplo 19

¿Cuál es la composición de las relaciones R y S?, donde R es la relación de $\{1, 2, 3\}$ a $\{1, 2, 3, 4\}$ y S es la relación de $\{1, 2, 3, 4\}$ a $\{0, 1, 2\}$ con:

$$\begin{aligned} R =& \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\} \\ S =& \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\} \end{aligned}$$

Solución:

- Por ejemplo, los pares ordenados $(2, 3)$ en R y $(3, 1)$ en S producen el par ordenado $(2, 1)$ en $S \circ R$.

Ejemplo 19 I

Ejemplo 19

¿Cuál es la composición de las relaciones R y S?, donde R es la relación de $\{1,2,3\}$ a $\{1,2,3,4\}$ y S es la relación de $\{1,2,3,4\}$ a $\{0,1,2\}$ con:

$$\begin{aligned} R =& \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\} \\ S =& \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\} \end{aligned}$$

Solución:

- Calculando todos los pares ordenados en la composición, encontramos

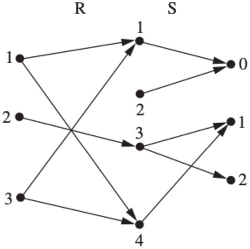
$$S \circ R = \{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}.$$

Ejemplo 19 II

$$
\begin{aligned}
R =& \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\} \\
S =& \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 19 II

$$R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$$
$$S = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$



$1 \to 1 \to 0$	(1, 0)
$1 \to 4 \to 1$	(1, 1)
$2 \to 3 \to 1$	(2, 1)
$2 \to 3 \to 2$	(2, 2)
$3 \to 1 \to 0$	(3, 0)
$3 \to 4 \to 1$	(3, 1)

Figura 3: Construcción de $S \circ R$ para el Ejemplo 19.

$$
\begin{aligned}
R =& \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\} \\
S =& \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}
\end{aligned}
$$

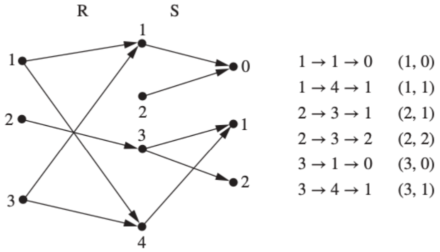


Figura 3: Construcción de $S \circ R$ para el Ejemplo 19.

$$S \circ R = \{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}.$$

Potencias de una Relación

Definición 7

Sea R una relación sobre el conjunto A. Las potencias $R^n, n = 1, 2, 3, \ldots,$ se definen recursivamente por

$$R^1 = R \qquad \text{y} \qquad R^{n+1} = R^n \circ R.$$

La definición muestra que $R^2 = R \circ R$, $R^3 = R^2 \circ R = (R \circ R) \circ R$, y así sucesivamente.

Ejemplo 20

Sea $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$. Encuentre las potencias $R^n, n = 2,3,4,\dots$.

Ejemplo 20

Ejemplo 20

Sea $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$. Encuentre las potencias $R^n, n = 2,3,4,\ldots$.

Solución:

Ejemplo 20

Ejemplo 20

Sea $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$. Encuentre las potencias $R^n, n = 2,3,4,\ldots$.

Solución:

- Como $R^2 = R \circ R$, encontramos que

$$R^2 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}.$$

Ejemplo 20

Sea $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$. Encuentre las potencias $R^n, n = 2,3,4,\ldots$.

Solución:

- Como $R^2 = R \circ R$, encontramos que

$$R^2 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}.$$

- Además, debido a que $R^3 = R^2 \circ R$,

$$R^3 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}.$$

Ejemplo 20

Sea $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$. Encuentre las potencias $R^n, n = 2,3,4,\ldots$.

Solución:

- Como $R^2 = R \circ R$, encontramos que

$$R^2 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}.$$

- Además, debido a que $R^3 = R^2 \circ R$,

$$R^3 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}.$$

- Un cálculo adicional muestra que R^4 es lo mismo que R^3, por lo que

$$R^4 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}.$$

Ejemplo 20

Sea $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$. Encuentre las potencias $R^n, n = 2,3,4,\ldots$.

Solución:

- Como $R^2 = R \circ R$, encontramos que
$$R^2 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}.$$
- Además, debido a que $R^3 = R^2 \circ R$,
$$R^3 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}.$$
- Un cálculo adicional muestra que R^4 es lo mismo que R^3, por lo que
$$R^4 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}.$$
- También se deduce que $R^n = R^3$ para $n = 4,5,6,7,\ldots$.

Ejercicios I

1. Para cada una de estas relaciones sobre el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, decida si es reflexiva, si es simétrica, si es antisimétrica y si es transitiva.
    1. $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$.
    2. $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.
    3. $\{(2,4),(4,2)\}$.
    4. $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$.
    5. $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.
    6. $\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4)\}$.
2. Sean

$$R_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\} \text{ y}$$

$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$$

relaciones de $\{1, 2, 3\}$ a $\{1, 2, 3, 4\}$. Encontrar

1. $R_1 \cup R_2$.
2. $R_1 \cap R_2$.
3. $R_1 - R_2$.
4. $R_2 - R_1$.

Ejercicios II

3. Sean R la relación $\{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,1)\}$ y sea S la relación $\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,2)\}$. Encuentre $S \circ R$.
4. Sea R la relación del conjunto $\{1,2,3,4,5\}$ que contiene los pares ordenados (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 2) y (5, 4). Encontrar
   1. R^2.
   2. R^3.
   3. R^4.
   4. R^5.