Autómatas de Pila

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Lenguajes Formales y Autómatas CCOS 014

Primavera 2020

Contenido

$L = \{a^n b^n : n > 0\}$

$$\overset{\downarrow}{a_1} a_2 \cdots a_n b_1 \cdots b_{n-1} b_n \qquad a_1 \overset{\downarrow}{a_2} \cdots a_n b_1 \cdots b_{n-1} b_n \qquad a_1 a_2 \cdots \overset{\downarrow}{a_n} b_1 \cdots b_{n-1} b_n$$

$$\begin{array}{ccc} & & a_n \\ & & \vdots \\ & a_2 & a_2 \\ a_1 & a_1 & a_1 \end{array}$$

$$a_1 a_2 \cdots a_n \overset{\downarrow}{b_1} \cdots b_{n-1} b_n \qquad a_1 a_2 \cdots a_n b_1 \cdots \overset{\downarrow}{b_{n-1}} b_n \qquad a_1 a_2 \cdots a_n b_1 \cdots b_{n-1} \overset{\downarrow}{b_n}$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \\ a_2 & & \\ a_1 & a_1 & \end{array}$$

Autómata de Pila No Determinista (APND)

Definición 1

Un autómata de pila no determinista se define por la septupla

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z, F),$$

Autómata de Pila No Determinista (APND)

Definición 1

Un autómata de pila no determinista se define por la septupla

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z, F),$$

donde

Autómata de Pila No Determinista (APND)

Definición 1

Un autómata de pila no determinista se define por la septupla

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z, F),$$

donde

Q es un conjunto de estados internos de la unidad de control,

Autómata de Pila No Determinista (APND)

Definición 1

Un autómata de pila no determinista se define por la septupla

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z, F),$$

donde

Q es un conjunto de estados internos de la unidad de control,

Σ es el alfabeto de entrada,

Autómata de Pila No Determinista (APND)

Definición 1

Un autómata de pila no determinista se define por la septupla

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z, F),$$

donde

Q es un conjunto de estados internos de la unidad de control,

Σ es el alfabeto de entrada,

Γ es un conjunto finito de de símbolos llamado el **alfabeto de la pila**,

Autómata de Pila No Determinista (APND)

Definición 1

Un autómata de pila no determinista se define por la septupla

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z, F),$$

donde

Q es un conjunto de estados internos de la unidad de control,

Σ es el alfabeto de entrada,

Γ es un conjunto finito de de símbolos llamado el **alfabeto de la pila**,

$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \rightarrow R \subseteq (Q \times \Gamma^*)$ es la función de transición, donde R debe ser un conjunto finito,

Autómata de Pila No Determinista (APND)

Definición 1

Un autómata de pila no determinista se define por la septupla

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z, F),$$

donde

Q es un conjunto de estados internos de la unidad de control,

Σ es el alfabeto de entrada,

Γ es un conjunto finito de de símbolos llamado el **alfabeto de la pila**,

$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \to R \subseteq (Q \times \Gamma^*)$ es la función de transición, donde R debe ser un conjunto finito,

$q_0 \in Q$ es el estado inicial de la unidad de control,

Autómata de Pila No Determinista (APND)

Definición 1

Un autómata de pila no determinista se define por la septupla

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z, F),$$

donde

Q es un conjunto de estados internos de la unidad de control,

Σ es el alfabeto de entrada,

Γ es un conjunto finito de de símbolos llamado el **alfabeto de la pila**,

$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \to R \subseteq (Q \times \Gamma^*)$ es la función de transición, donde R debe ser un conjunto finito,

$q_0 \in Q$ es el estado inicial de la unidad de control,

$z \in \Gamma$ es el **símbolo inicial de la pila**,

Autómata de Pila No Determinista (APND)

Definición 1

Un autómata de pila no determinista se define por la septupla

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z, F),$$

donde

Q es un conjunto de estados internos de la unidad de control,

Σ es el alfabeto de entrada,

Γ es un conjunto finito de de símbolos llamado el **alfabeto de la pila**,

$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \to R \subseteq (Q \times \Gamma^*)$ es la función de transición, donde R debe ser un conjunto finito,

$q_0 \in Q$ es el estado inicial de la unidad de control,

$z \in \Gamma$ es el **símbolo inicial de la pila**,

F $\subseteq Q$ es el conjunto de estados finales.

Ejemplo 2

Suponga que el conjunto de reglas de transición de un APND contiene:

$$\delta(q_1, a, b) = \{(q_2, cd), (q_3, \lambda)\}.$$

Si en algún momento el autómata entra al estado q_1, lee el símbolo de entrada a y el símbolo en el tope de la pila es b, entonces ocurren dos cosas:

1. el autómata entra al estado q_2 y la cadena cd reemplaza a b en el tope de la pila, es decir, b se elimina del tope de la pila y se empila la cadena cd.
2. el autómata entra al estado q_3 y la cadena λ reemplaza a b en el tope de la pila, es decir, b se elimina del tope de la pila y ninguna cadena se empila.

Ejemplo 2

Suponga que el conjunto de reglas de transición de un APND contiene:

$$\delta(q_1, a, b) = \{(q_2, cd), (q_3, \lambda)\}.$$

Si en algún momento el autómata entra al estado q_1, lee el símbolo de entrada a y el símbolo en el tope de la pila es b, entonces ocurren dos cosas:

1. el autómata entra al estado q_2 y la cadena cd reemplaza a b en el tope de la pila, es decir, b se elimina del tope de la pila y se empila la cadena cd.
2. el autómata entra al estado q_3 y la cadena λ reemplaza a b en el tope de la pila, es decir, b se elimina del tope de la pila y ninguna cadena se empila.

Asumimos que insertar una cadena en la pila se hace símbolo por símbolo, empezando por la parte más derecha de la cadena.

Ejemplo 3

Considere el siguiente APND:

$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\},\\
\Sigma &= \{a, b\},\\
\Gamma &= \{0, 1\},\\
z &= 0,\\
F &= \{q_3\}.
\end{aligned}
$$

con estado inicial q_0 y

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, a, 0) &= \{(q_1, 10), (q_3, \lambda)\}, & \delta(q_1, b, 1) &= \{(q_2, \lambda)\},\\
\delta(q_0, \lambda, 0) &= \{(q_3, \lambda)\}, & \delta(q_2, b, 1) &= \{(q_2, \lambda)\},\\
\delta(q_1, a, 1) &= \{(q_1, 11)\}, & \delta(q_2, \lambda, 0) &= \{(q_3, \lambda)\}.
\end{aligned}
$$

Ejemplos III

$$\delta(q_0, a, 0) = \{(q_1, 10), (q_3, \lambda)\}, \qquad \delta(q_1, b, 1) = \{(q_2, \lambda)\},$$
$$\delta(q_0, \lambda, 0) = \{(q_3, \lambda)\}, \qquad \delta(q_2, b, 1) = \{(q_2, \lambda)\},$$
$$\delta(q_1, a, 1) = \{(q_1, 11)\}, \qquad \delta(q_2, \lambda, 0) = \{(q_3, \lambda)\}.$$

Note que:

Ejemplos III

$$\delta(q_0, a, 0) = \{(q_1, 10), (q_3, \lambda)\}, \qquad \delta(q_1, b, 1) = \{(q_2, \lambda)\},$$
$$\delta(q_0, \lambda, 0) = \{(q_3, \lambda)\}, \qquad \delta(q_2, b, 1) = \{(q_2, \lambda)\},$$
$$\delta(q_1, a, 1) = \{(q_1, 11)\}, \qquad \delta(q_2, \lambda, 0) = \{(q_3, \lambda)\}.$$

Note que:

- No están especificadas las transiciones para todas las combinaciones posibles de símbolos de entrada y símbolos de la pila, por ejemplo $\delta(q_0, b, 0)$ no aparece en la lista de transiciones, lo cual significa que se mapea al conjunto vacío y que el autómata se detiene sin terminar de procesar la entrada.

Ejemplos III

$$\delta(q_0, a, 0) = \{(q_1, 10), (q_3, \lambda)\}, \qquad \delta(q_1, b, 1) = \{(q_2, \lambda)\},$$
$$\delta(q_0, \lambda, 0) = \{(q_3, \lambda)\}, \qquad \delta(q_2, b, 1) = \{(q_2, \lambda)\},$$
$$\delta(q_1, a, 1) = \{(q_1, 11)\}, \qquad \delta(q_2, \lambda, 0) = \{(q_3, \lambda)\}.$$

Note que:

- No están especificadas las transiciones para todas las combinaciones posibles de símbolos de entrada y símbolos de la pila, por ejemplo $\delta(q_0, b, 0)$ no aparece en la lista de transiciones, lo cual significa que se mapea al conjunto vacío y que el autómata se detiene sin terminar de procesar la entrada.
- Las transiciones cruciales son:
  - $\delta(q_1, a, 1) = \{(q_1, 11)\}$ que empila un 11 cuando lee a.
  - $\delta(q_2, b, 1) = \{(q_2, \lambda)\}$ que desempila un 1 cuando lee b.

Ejemplos III

$$\delta(q_0, a, 0) = \{(q_1, 10), (q_3, \lambda)\}, \qquad \delta(q_1, b, 1) = \{(q_2, \lambda)\},$$
$$\delta(q_0, \lambda, 0) = \{(q_3, \lambda)\}, \qquad \delta(q_2, b, 1) = \{(q_2, \lambda)\},$$
$$\delta(q_1, a, 1) = \{(q_1, 11)\}, \qquad \delta(q_2, \lambda, 0) = \{(q_3, \lambda)\}.$$

Note que:

- No están especificadas las transiciones para todas las combinaciones posibles de símbolos de entrada y símbolos de la pila, por ejemplo $\delta(q_0, b, 0)$ no aparece en la lista de transiciones, lo cual significa que se mapea al conjunto vacío y que el autómata se detiene sin terminar de procesar la entrada.
- Las transiciones cruciales son:
  - $\delta(q_1, a, 1) = \{(q_1, 11)\}$ que empila un 11 cuando lee a.
  - $\delta(q_2, b, 1) = \{(q_2, \lambda)\}$ que desempila un 1 cuando lee b.

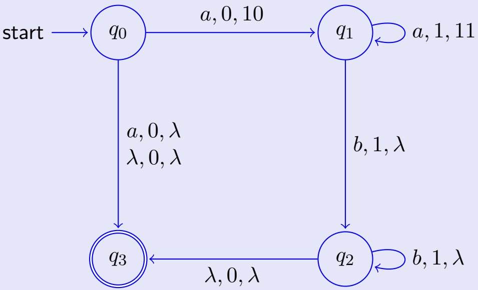
$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\} \cup \{a\}$$

.

Ejemplos IV

El APND del ejemplo 3 se representa mediante el grafo de transiciones siguiente:

Ejemplo 4



$$\delta(q_0, a, 0) = \{(q_1, 10), (q_3, \lambda)\},$$
$$\delta(q_0, \lambda, 0) = \{(q_3, \lambda)\},$$
$$\delta(q_1, a, 1) = \{(q_1, 11)\},$$
$$\delta(q_1, b, 1) = \{(q_2, \lambda)\},$$
$$\delta(q_2, b, 1) = \{(q_2, \lambda)\},$$
$$\delta(q_2, \lambda, 0) = \{(q_3, \lambda)\}.$$

Note:

Observación 5

- El hecho de que además de tomar en cuenta los estados internos del APND, debemos de conocer también el contendio de la pila, los grafos de transiciones no son útiles para hacer razonamientos formales, aunque sí para describir a los APND.

Note:

Observación 5

- Los factores relevantes en cualquier momento son el estado en el que se encuentra el autómata, la parte que no se ha leído de la cadena de entrada y el contenido actual de la pila.

Definición descripción instantánea II

Definición 6

Al triple

$$(q, w, u),$$

donde q es el estado en el que se encuentra el autómata, w es la parte que no se ha leído de la cadena de entrada y u es el contenido de la pila (el símbolo más a la izquierda de u está en el tope de la pila), se le llama **descripción instantánea** del autómata de pila.

Definición 7

Un **movimiento en un paso** de una descripción intantánea a otra se denota mediante el símbolo $\vdash$; así

$$(q_1, aw, bx) \vdash (q_2, w, yx)$$

es posible si y sólo si

$$(q_2, y) \in \delta(q_1, a, b).$$

Definición movimiento

Definición 7

Un **movimiento en un paso** de una descripción intantánea a otra se denota mediante el símbolo $\vdash$; así

$$(q_1, aw, bx) \vdash (q_2, w, yx)$$

es posible si y sólo si

$$(q_2, y) \in \delta(q_1, a, b).$$

Movimientos que toman un número arbitrario de pasos se denotan mediante $\overset{*}{\vdash}$. Así, la expresión

$$(q_1, w_1, x_1) \overset{*}{\vdash} (q_2, w_2, x_2)$$

indica un posible cambio de configuración en cierto número de pasos.

Lenguaje aceptado por un APND

Definición 8

Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z, F)$ un autómata de pila no determinista. El lenguaje aceptado por M es el conjunto

$$L(M) = \left\{ w \in \Sigma^* : (q_0, w, z) \overset{*}{\vdash}_M (p, \lambda, u), p \in F, u \in \Gamma^* \right\}.$$

En palabras, el lenguaje aceptado por un APND es el conjunto de palabras que al ser leídas por el autómata lo llevan a un estado final, sin importar lo que quede en la pila.

Ejemplo 9

Construya un APND que acepte el lenguaje

$$L = \Big\{ w \in \{a, b\}^* : n_a(w) = n_b(w) \Big\}.$$

Solución:

- La idea es empilar un 0 cuando leamos una a, después cuando leamos una b desempilamos el 0 que esté en el tope de la pila.

Ejemplo 1 construcción de un APND I

Ejemplo 9

Construya un APND que acepte el lenguaje

$$L = \Big\{ w \in \{a, b\}^* : n_a(w) = n_b(w) \Big\}.$$

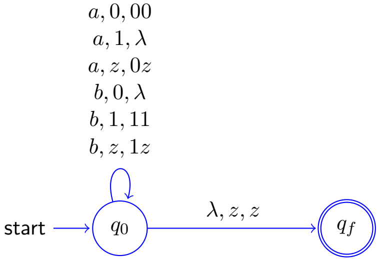
Solución:

- La idea es empilar un 0 cuando leamos una a, después cuando leamos una b desempilamos el 0 que esté en el tope de la pila.
- Como el orden en que aparecen las as y bs no importa, podemos tener problemas si al inicio de la cadena hay más bs que as, para resolver este caso, cuando se lea una b y no haya un 0 en el tope de la pila, entonces empilamos un 1, esperando que posteriormente la cadena contenga la a que empate con la b leída previamente.

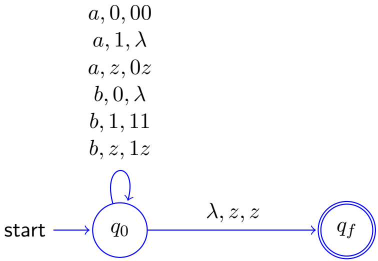
Ejemplo 1 construcción de un APND II

$$\delta(q_0, a, 0) = \{(q_0, 00)\}, \qquad \delta(q_0, b, 0) = \{(q_0, \lambda)\},$$
$$\delta(q_0, a, 1) = \{(q_0, \lambda)\}, \qquad \delta(q_0, b, 1) = \{(q_0, 11)\},$$
$$\delta(q_0, a, z) = \{(q_0, 0z)\}, \qquad \delta(q_0, b, z) = \{(q_0, 1z)\},$$

$$\delta(q_0, \lambda, z) = \{(q_f, z)\}.$$



Ejemplo 1 construcción de un APND III



$$(q_0, baab, z) \vdash (q_0, aab, 1z) \vdash (q0, ab, z)$$
$$\vdash (q_0, b, 0z) \vdash (q_0, \lambda, z) \vdash (q_f, \lambda, z)$$

por lo tanto la cadena $baab$ es aceptada.

Ejemplo 2 construcción de un APND I

Ejemplo 10

Construya un APND que acepte el lenguaje:

$$L = \left\{ ww^R : w \in \{a, b\}^+ \right\}$$

Solución:

- Conforme el autómata vaya leyendo w, éste irá empilando sus símbolos, cuando empiece a procesar w^R los símbolos deberán ir empatando con el tope de la pila.

Ejemplo 10

Construya un APND que acepte el lenguaje:

$$L = \left\{ ww^R : w \in \{a, b\}^+ \right\}$$

Solución:

- Conforme el autómata vaya leyendo w, éste irá empilando sus símbolos, cuando empiece a procesar w^R los símbolos deberán ir empatando con el tope de la pila.
- El problema es que de antemano no se sabe dónde termina w y dónde empieza w^R.

Ejemplo 10

Construya un APND que acepte el lenguaje:

$$L = \left\{ ww^R : w \in \{a, b\}^+ \right\}$$

Solución:

- Conforme el autómata vaya leyendo w, éste irá empilando sus símbolos, cuando empiece a procesar w^R los símbolos deberán ir empatando con el tope de la pila.
- El problema es que de antemano no se sabe dónde termina w y dónde empieza w^R.
- Para resolver esta situación contamos con el no determinismo; por un lado en cada movimiento estando en q_0 asumimos que el autómata debe seguir empilando símbolos, por otro lado el autómata supone que en esa posición empieza w^R y cambia al estado q_1.

Ejemplo 2 construcción de un APND II

Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z, F)$ un autómata de pila no determinista donde

$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_1, q_2\},\\
\Sigma &= \{a, b\},\\
\Gamma &= \{a, b, z\},\\
F &= \{q_2\}.
\end{aligned}
$$

La función de transición tiene un conjunto de entradas que empilan a w, estando en el estado q_0:

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, a, a) &= \{(q_0, aa)\}, & \delta(q_0, b, a) &= \{(q_0, ba)\},\\
\delta(q_0, a, b) &= \{(q_0, ab)\}, & \delta(q_0, b, b) &= \{(q_0, bb)\},\\
\delta(q_0, a, z) &= \{(q_0, az)\}, & \delta(q_0, b, z) &= \{(q_0, bz)\}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2 construcción de un APND III

Un conjunto de transiciones que adivinan dónde empieza w^R, cambiando al estado q_1:

$$\delta(q_0, \lambda, a) = \{(q_1, a)\}, \qquad \delta(q_0, \lambda, b) = \{(q_1, b)\}.$$

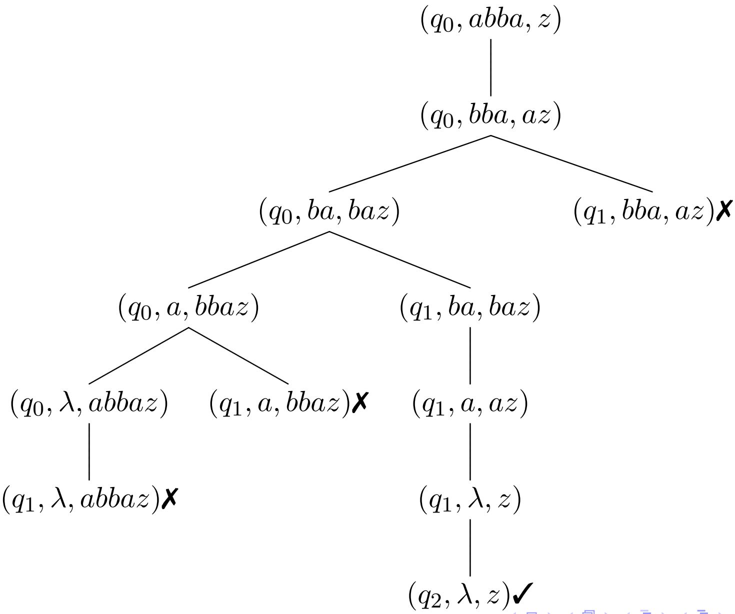
Un conjunto que empata w^R con el contenido de la pila:

$$\delta(q_1, a, a) = \{(q_1, \lambda)\}, \qquad \delta(q_1, b, b) = \{(q_1, \lambda)\}.$$

Finalmente, la transición que reconoce un empate exitoso:

$$\delta(q_1, \lambda, z) = \{(q_2, z)\}.$$

Ejemplo 2 construcción de un APND IV



Ejercicios

Construya APND que acepten los siguientes lenguajes:

1. $L = \left\{a^n b^{3n} : n \geq 0\right\}$.
2. $L = \left\{wcw^R : w \in \{a, b\}^*\right\}$.
3. $L = \left\{a^n b^m c^{n+m} : n \geq 0, m \geq 0\right\}$.
4. $L = \left\{a^n b^{n+m} c^m : n \geq 0, m \geq 1\right\}$.
5. $L = \left\{a^3 b^n c^n : n \geq 0\right\}$.
6. $L = \left\{a^n b^m : n \leq m \leq 3n\right\}$.
7. $L = \left\{w : n_a(w) = n_b(w) + 1\right\}$.
8. $L = \left\{w : n_a(w) = 2n_b(w)\right\}$.
9. $L = \left\{w : n_a(w) + n_b(w) = n_c(w)\right\}$.
10. $L = \left\{w : 2n_a(w) \leq n_b(w) \leq 3n_a(w)\right\}$.
11. $L = \left\{w : n_a(w) < n_b(w)\right\}$.