

5.1 Lenguajes Libres de Contexto

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Lenguajes Formales y Autómatas CCOS 014

Primavera 2020

- 1 Lenguajes Libres de Contexto
- 2 Ejemplos de Lenguajes Libres de Contexto
- 3 Derivaciones más izquierda y más derecha
- 4 Árboles de derivación
- 5 Formas sentenciales y árboles de derivación
- 6 Ejercicios

$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

Gramática Lineal Derecha

$$S \rightarrow A|\lambda,$$

$$A \rightarrow aA|B,$$

$$B \rightarrow bB|\lambda.$$

$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

Gramática Lineal Derecha

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A|\lambda, \\ A &\rightarrow aA|B, \\ B &\rightarrow bB|\lambda. \end{aligned}$$

Gramática Lineal Izquierda

$$\begin{aligned} S &\rightarrow B|\lambda, \\ B &\rightarrow Bb|A, \\ A &\rightarrow Aa|\lambda. \end{aligned}$$

Gramática Libre de Contexto

$$S \rightarrow aSb|\lambda.$$

Definición 1

Una gramática $G = (V, T, S, P)$ se dice que es **libre de contexto** si todas las producciones en P tienen la forma

$$A \rightarrow x,$$

donde $A \in V$ y $x \in (V \cup T)^*$.

Se dice que un lenguaje L es libre de contexto si y sólo si existe una gramática libre de contexto G tal que $L = L(G)$.

Ejemplo 2

La gramática $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$ con producciones

$$S \rightarrow aSa,$$

$$S \rightarrow bSb,$$

$$S \rightarrow \lambda,$$

es libre de contexto.

Ejemplo 2

La gramática $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$ con producciones

$$S \rightarrow aSa,$$

$$S \rightarrow bSb,$$

$$S \rightarrow \lambda,$$

es libre de contexto. Una derivación en la gramática es

$$S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aabSbaa \Rightarrow aabbaa$$

Ejemplo 2

La gramática $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$ con producciones

$$S \rightarrow aSa,$$

$$S \rightarrow bSb,$$

$$S \rightarrow \lambda,$$

es libre de contexto. Una derivación en la gramática es

$$S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aabSbaa \Rightarrow aabbbaa$$

El lenguaje que genera es

$$L(G) = \{ww^R : w \in \{a, b\}^*\},$$

el cual es libre de contexto y lineal (del lado derecho de la producción a lo más aparece una variable).

Ejemplo 3

Considere la gramática con producciones

$$S \rightarrow aSb | SS | \lambda.$$

Ejemplo 3

Considere la gramática con producciones

$$S \rightarrow aSb | SS | \lambda.$$

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow aSbS \Rightarrow abS \Rightarrow abaSb \Rightarrow abaaSbb \Rightarrow abaabb,$$

Ejemplo 3

Considere la gramática con producciones

$$S \rightarrow aSb|SS|\lambda.$$

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow aSbS \Rightarrow abS \Rightarrow abaSb \Rightarrow abaaSbb \Rightarrow abaabb,$$

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aSSb \Rightarrow aaSbSb \Rightarrow aabSb \Rightarrow aabaSbb \Rightarrow aababb,$$

Ejemplo 3

Considere la gramática con producciones

$$S \rightarrow aSb|SS|\lambda.$$

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow aSbS \Rightarrow abS \Rightarrow abaSb \Rightarrow abaaSbb \Rightarrow abaabb,$$

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aSSb \Rightarrow aaSbSb \Rightarrow aabSb \Rightarrow aabaSbb \Rightarrow aababb,$$

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow SSS \Rightarrow aSbSS \Rightarrow abSS \Rightarrow abaSbS \Rightarrow \\ ababS \Rightarrow ababaSb \Rightarrow ababab.$$

Ejemplo 3

Considere la gramática con producciones

$$S \rightarrow aSb|SS|\lambda.$$

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow aSbS \Rightarrow abS \Rightarrow abaSb \Rightarrow abaaSbb \Rightarrow abaabb,$$

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aSSb \Rightarrow aaSbSb \Rightarrow aabSb \Rightarrow aabaSbb \Rightarrow aababb,$$

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow SSS \Rightarrow aSbSS \Rightarrow abSS \Rightarrow abaSbS \Rightarrow \\ ababS \Rightarrow ababaSb \Rightarrow ababab.$$

$$L = \{w \in \{a, b\}^*, n_a(w) = n_b(w)\} \text{ y } n_a(v) \geq n_b(v), \}$$

donde v es cualquier prefijo de w .

Ejemplo 4

Considere la gramática $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, S, P)$ con producciones

$$S \rightarrow AB, \quad (1)$$

$$A \rightarrow aaA, \quad (2)$$

$$A \rightarrow \lambda, \quad (3)$$

$$B \rightarrow Bb, \quad (4)$$

$$B \rightarrow \lambda, \quad (5)$$

esta gramática genera el lenguaje $L(G) = \{a^{2n}b^m : n \geq 0, m \geq 0\}$.

Considere las siguientes derivaciones

$$S \xRightarrow{(1)} AB \xRightarrow{(2)} aaAB \xRightarrow{(3)} aaB \xRightarrow{(4)} aaBb \xRightarrow{(5)} aab$$

y

$$S \xRightarrow{(1)} AB \xRightarrow{(4)} ABb \xRightarrow{(2)} aaABb \xRightarrow{(5)} aaAb \xRightarrow{(3)} aab.$$

Considere las siguientes derivaciones

$$S \xRightarrow{(1)} AB \xRightarrow{(2)} aaAB \xRightarrow{(3)} aaB \xRightarrow{(4)} aaBb \xRightarrow{(5)} aab$$

y

$$S \xRightarrow{(1)} AB \xRightarrow{(4)} ABb \xRightarrow{(2)} aaABb \xRightarrow{(5)} aaAb \xRightarrow{(3)} aab.$$

Ambas derivaciones producen la misma palabra y usan las mismas producciones, aunque en diferente orden.

Definición 5

Una derivación se dice que es **más izquierda** si en cada paso es reemplazada la variable más izquierda de la forma sentencial. Si en cada paso la variable más derecha es reemplazada le llamamos derivación **más derecha**.

Ejemplo 6

Considere la gramática con producciones

$$S \rightarrow aAB,$$

$$A \rightarrow bBb,$$

$$B \rightarrow A|\lambda,$$

Ejemplo 6

Considere la gramática con producciones

$$S \rightarrow aAB,$$

$$A \rightarrow bBb,$$

$$B \rightarrow A|\lambda,$$

Entonces

$$S \Rightarrow aAB \Rightarrow abBbB \Rightarrow abAbB \Rightarrow abbBbbB \Rightarrow abbbbB \Rightarrow abbbb$$

es una derivación más izquierda de la palabra *abbbb*.

Ejemplo 6

Considere la gramática con producciones

$$S \rightarrow aAB,$$

$$A \rightarrow bBb,$$

$$B \rightarrow A|\lambda,$$

Entonces

$$S \Rightarrow aAB \Rightarrow abBbB \Rightarrow abAbB \Rightarrow abbBbbB \Rightarrow abbbbB \Rightarrow abbbb$$

es una derivación más izquierda de la palabra *abbbb*. Una derivación más derecha de la misma palabra es

$$S \Rightarrow aAB \Rightarrow aA \Rightarrow abBb \Rightarrow abAb \Rightarrow abbBbb \Rightarrow abbbb.$$

Los árboles de derivación

- muestran una derivación independientemente del orden en el que se usaron las producciones.

Los árboles de derivación

- muestran una derivación independientemente del orden en el que se usaron las producciones.
- son árboles ordenados cuyos nodos son etiquetados con el lado izquierdo de una producción, los hijos de un nodo son etiquetados con los símbolos del lado derecho de la producción, un hijo por cada símbolo.

Los árboles de derivación

- muestran una derivación independientemente del orden en el que se usaron las producciones.
- son árboles ordenados cuyos nodos son etiquetados con el lado izquierdo de una producción, los hijos de un nodo son etiquetados con los símbolos del lado derecho de la producción, un hijo por cada símbolo.
- tienen la raíz etiquetada con el símbolo inicial.

Los árboles de derivación

- muestran una derivación independientemente del orden en el que se usaron las producciones.
- son árboles ordenados cuyos nodos son etiquetados con el lado izquierdo de una producción, los hijos de un nodo son etiquetados con los símbolos del lado derecho de la producción, un hijo por cada símbolo.
- tienen la raíz etiquetada con el símbolo inicial.
- tienen hojas etiquetadas con símbolos en $T \cup \{\lambda\}$.

Árboles de derivación

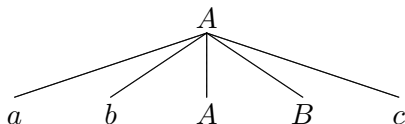
Los árboles de derivación

- muestran una derivación independientemente del orden en el que se usaron las producciones.
- son árboles ordenados cuyos nodos son etiquetados con el lado izquierdo de una producción, los hijos de un nodo son etiquetados con los símbolos del lado derecho de la producción, un hijo por cada símbolo.
- tienen la raíz etiquetada con el símbolo inicial.
- tienen hojas etiquetadas con símbolos en $T \cup \{\lambda\}$.

La producción

$$A \rightarrow abABc,$$

tiene el siguiente árbol de derivación



Definición 7

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. Un árbol ordenado es un árbol de derivación de G si y sólo si tiene las siguientes propiedades.

Definición 7

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. Un árbol ordenado es un árbol de derivación de G si y sólo si tiene las siguientes propiedades.

Definición 7

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. Un árbol ordenado es un árbol de derivación de G si y sólo si tiene las siguientes propiedades.

1. La raíz tiene etiqueta S .

Definición 7

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. Un árbol ordenado es un árbol de derivación de G si y sólo si tiene las siguientes propiedades.

1. La raíz tiene etiqueta S .
2. Cada hoja tiene una etiqueta en $T \cup \{\lambda\}$.

Definición 7

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. Un árbol ordenado es un árbol de derivación de G si y sólo si tiene las siguientes propiedades.

1. La raíz tiene etiqueta S .
2. Cada hoja tiene una etiqueta en $T \cup \{\lambda\}$.
3. Cada vértice interior tiene una etiqueta en V .

Definición 7

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. Un árbol ordenado es un árbol de derivación de G si y sólo si tiene las siguientes propiedades.

1. La raíz tiene etiqueta S .
2. Cada hoja tiene una etiqueta en $T \cup \{\lambda\}$.
3. Cada vértice interior tiene una etiqueta en V .
4. Si un vértice tiene una etiqueta $A \in V$ y sus hijos están etiquetados (de izquierda a derecha) a_1, a_2, \dots, a_n , entonces P debe contener una producción de la forma

$$A \rightarrow a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Definición 7

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. Un árbol ordenado es un árbol de derivación de G si y sólo si tiene las siguientes propiedades.

1. La raíz tiene etiqueta S .
2. Cada hoja tiene una etiqueta en $T \cup \{\lambda\}$.
3. Cada vértice interior tiene una etiqueta en V .
4. Si un vértice tiene una etiqueta $A \in V$ y sus hijos están etiquetados (de izquierda a derecha) a_1, a_2, \dots, a_n , entonces P debe contener una producción de la forma

$$A \rightarrow a_1, a_2, \dots, a_n.$$

5. Una hoja con etiqueta λ no puede tener hermanos, es decir, un vértice con un hijo etiquetado λ no puede tener otro hijo.

Definición de árbol de derivación II

A un árbol que tenga las propiedades 3, 4 y 5, que no necesariamente cumpla la propiedad 1 y donde la propiedad 2 se reemplaza por

2a. Toda hoja tiene una etiqueta en $V \cup T \cup \{\lambda\}$,

se le llama **árbol de derivación parcial**.

Definición de árbol de derivación II

El **producto** de un árbol es la cadena formada por las etiquetas de las hojas del árbol en el orden que se van encontrando cuando se hace un recorrido primero en profundidad, siempre tomando la rama más izquierda que no se ha explorado.

Ejemplo 8

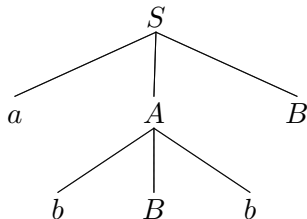
Considere la gramática con producciones

$$S \rightarrow aAB,$$

$$A \rightarrow bBb,$$

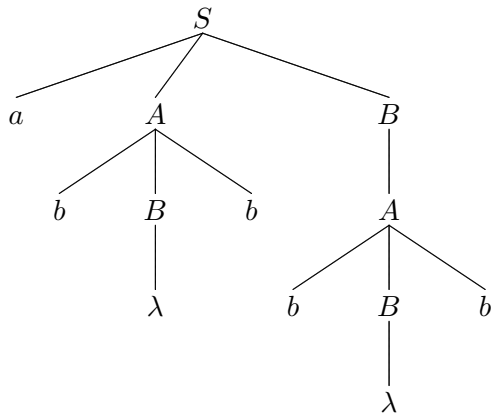
$$B \rightarrow A|\lambda,$$

La cadena $abBbB$ es una forma sentencial de G y es el producto del siguiente árbol de derivación parcial de G .



Ejemplo árbol de derivación II

La cadena $abbbb$ es una sentencia de $L(G)$ y es el producto del siguiente árbol de derivación de G .



$w \in L(G)$ ssi existe un árbol de derivación de G con producto w |

Teorema 9

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. $w \in L(G)$ si y sólo si existe un árbol de derivación de G con producto w .

$w \in L(G)$ ssi existe un árbol de derivación de G con producto w |

Teorema 9

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. $w \in L(G)$ si y sólo si existe un árbol de derivación de G con producto w .

Demostración: Por inducción sobre el número de pasos en la derivación \xRightarrow{i} , pero lo haremos de manera más general demostraremos que w es una forma sentencial de $L(G)$ si y sólo si w es el producto de un árbol de derivación parcial de G .

$w \in L(G)$ ssi existe un árbol de derivación de G con producto w |

Teorema 9

Sea $G = (V, T, S, P)$ una gramática libre de contexto. $w \in L(G)$ si y sólo si existe un árbol de derivación de G con producto w .

Demostración: Por inducción sobre el número de pasos en la derivación \xRightarrow{i} , pero lo haremos de manera más general demostraremos que w es una forma sentencial de $L(G)$ si y sólo si w es el producto de un árbol de derivación parcial de G .

Hi. $S \xRightarrow{n} u$ si y sólo si u es el producto de un árbol de derivación parcial de G .

$w \in L(G)$ ssi existe un árbol de derivación de G con producto w II

$i = 1$. $S \stackrel{1}{\Rightarrow} u$ entonces debe existir una producción de la forma $S \rightarrow u$ si y sólo si de acuerdo a la definición 7 (3) hay un árbol de derivación con vértice S cuyos hijos son cada uno de los símbolos de la cadena u .

$w \in L(G)$ ssi existe un árbol de derivación de G con producto w II

$i = 1$. $S \xrightarrow{1} u$ entonces debe existir una producción de la forma $S \rightarrow u$ si y sólo si de acuerdo a la definición 7 (3) hay un árbol de derivación con vértice S cuyos hijos son cada uno de los símbolos de la cadena u .

$i = n + 1$. Asuma por HI que

$$S \xrightarrow{n} u = xAy; x, y \in (V \cup T)^*; A \in V$$

ssi existe un árbol de derivación parcial de G con producto xAy .

$w \in L(G)$ ssi existe un árbol de derivación de G con producto w II

$i = 1$. $S \xrightarrow{1} u$ entonces debe existir una producción de la forma $S \rightarrow u$ si y sólo si de acuerdo a la definición 7 (3) hay un árbol de derivación con vértice S cuyos hijos son cada uno de los símbolos de la cadena u .

$i = n + 1$. Asuma por HI que

$$S \xrightarrow{n} u = xAy; x, y \in (V \cup T)^*; A \in V$$

ssi existe un árbol de derivación parcial de G con producto xAy . Podemos hacer una derivación más, es decir, si $A \rightarrow a_1a_2 \cdots a_m$, entonces

$$xAy \Rightarrow xa_1a_2 \cdots a_my = w; a_i \in V \cup T.$$

$w \in L(G)$ ssi existe un árbol de derivación de G con producto w II

$i = 1$. $S \xrightarrow{1} u$ entonces debe existir una producción de la forma $S \rightarrow u$ si y sólo si de acuerdo a la definición 7 (3) hay un árbol de derivación con vértice S cuyos hijos son cada uno de los símbolos de la cadena u .

$i = n + 1$. Asuma por HI que

$$S \xrightarrow{n} u = xAy; x, y \in (V \cup T)^*; A \in V$$

ssi existe un árbol de derivación parcial de G con producto xAy . Podemos hacer una derivación más, es decir, si $A \rightarrow a_1a_2 \cdots a_m$, entonces

$$xAy \Rightarrow xa_1a_2 \cdots a_my = w; a_i \in V \cup T.$$

Podemos expandir el vértice etiquetado A , por la definición 7 (3), del árbol de derivación parcial que tiene como producto xAy para obtener un nuevo árbol de derivación parcial con producto $xa_1a_2 \cdots a_my$.

$w \in L(G)$ ssi existe un árbol de derivación de G con producto w III

Ya que un árbol de derivación también es un árbol de derivación parcial cuyas hojas son terminales, se sigue que toda sentencia en $L(G)$ es el producto de un árbol de derivación de G y que el producto de todo árbol de derivación está en $L(G)$.

- Encuentre gramáticas libres de contexto para los siguientes lenguajes:
 - $L = \{a^n b^n : n \text{ es par}\},$
 - $L = \{a^n b^n : n \text{ es impar}\},$
 - $L = \{a^n b^n : n \text{ es múltiplo de tres}\},$
 - $L = \{a^n b^m : n \leq m + 3\},$
 - $L = \{a^n b^m : n = m - 1\}.$

- Demuestre que las gramáticas que propuso en el ejercicio anterior generan los respectivos lenguajes.
- Encuentre una gramática libre de contexto for $\Sigma = \{a, b\}$ para el lenguaje

$$L = \left\{ a^n w w^R b^n : w \in \Sigma^*, n \geq 1 \right\}.$$

- Sea $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$, demuestre que:
 - L^2 es libre de contexto.
 - L^k es libre de contexto para todo $k > 1$.