4 Propiedades Lengujes Regulares

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Lenguajes Formales y Autómatas CCOS 014

Primavera 2020

Contenido

Cerradura bajo unión, concatenación y cerradura estrella

Teorema 1

Si L_1 y L_2 son lenguajes regulares, también lo son $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 L_2$, $\overline{L_1}$ y L_1^*.

Cerradura bajo unión, concatenación y cerradura estrella

Teorema 1

Si L_1 y L_2 son lenguajes regulares, también lo son $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 L_2$, $\overline{L_1}$ y L_1^*.

Demostración: Si L_1 y L_2 son lenguajes regulares, entonces existen expresiones regulares r_1 y r_2 tales que $L_1 = L(r_1)$ y $L_2 = L(r_2)$. Por definición $r_1 + r_2$, $r_1 r_2$ y r_1^* son expresiones regulares que respectivamente denotan a los lenguajes $L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2$ y L_1^*. Así, la cerradura sobre la unión, concatenación y cerradura estrella es inmediata.

Cerradura bajo complemento

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD que acepta L_1. Entonces el AFD

$$\widehat{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$$

acepta $\overline{L_1}$.

Cerradura bajo complemento

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD que acepta L_1. Entonces el AFD

$$\widehat{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$$

acepta $\overline{L_1}$. Recuerde que en la definición de un AFD la función δ^* es una función total, así $\delta^*(q_0, w)$ está definida para toda $w \in \Sigma^*$. En consecuencia, si $\delta^*(q_0, w) \in F$ entonces $w \in L_1$, en otro caso $\delta^*(q_0, w) \in Q - F$ por lo tanto $w \in \overline{L_1}$.

Cerradura bajo intersección I

Sean $L_1 = L(M_1)$ y $L_2 = L(M_2)$, donde $M_1 = (Q, \Sigma, \delta_1, q_0, F_1)$ y $M_2 = (P, \Sigma, \delta_2, p_0, F_2)$ son AFDs.

Cerradura bajo intersección I

Sean $L_1 = L(M_1)$ y $L_2 = L(M_2)$, donde $M_1 = (Q, \Sigma, \delta_1, q_0, F_1)$ y $M_2 = (P, \Sigma, \delta_2, p_0, F_2)$ son AFDs.

$$\widehat{M} = (\widehat{Q}, \Sigma, \widehat{\delta}, (q_0, p_0), \widehat{F})$$

Cerradura bajo intersección I

Sean $L_1 = L(M_1)$ y $L_2 = L(M_2)$, donde $M_1 = (Q, \Sigma, \delta_1, q_0, F_1)$ y $M_2 = (P, \Sigma, \delta_2, p_0, F_2)$ son AFDs.

$$\widehat{M} = (\widehat{Q}, \Sigma, \widehat{\delta}, (q_0, p_0), \widehat{F})$$

donde

$$\widehat{Q} = Q \times P$$

Cerradura bajo intersección I

Sean $L_1 = L(M_1)$ y $L_2 = L(M_2)$, donde $M_1 = (Q, \Sigma, \delta_1, q_0, F_1)$ y $M_2 = (P, \Sigma, \delta_2, p_0, F_2)$ son AFDs.

$$\widehat{M} = (\widehat{Q}, \Sigma, \widehat{\delta}, (q_0, p_0), \widehat{F})$$

donde

$$\widehat{Q} = Q \times P$$

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}((q_i, p_j), a) &= (q_k, p_l), \text{ siempre que} \\ \delta_1(q_i, a) &= q_k \text{ y} \\ \delta_2(p_j, a) &= p_l. \end{aligned}$$

Cerradura bajo intersección I

Sean $L_1 = L(M_1)$ y $L_2 = L(M_2)$, donde $M_1 = (Q, \Sigma, \delta_1, q_0, F_1)$ y $M_2 = (P, \Sigma, \delta_2, p_0, F_2)$ son AFDs.

$$\widehat{M} = (\widehat{Q}, \Sigma, \widehat{\delta}, (q_0, p_0), \widehat{F})$$

donde

$$\widehat{Q} = Q \times P$$

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}((q_i, p_j), a) &= (q_k, p_l), \text{ siempre que} \\ \delta_1(q_i, a) &= q_k \text{ y} \\ \delta_2(p_j, a) &= p_l. \end{aligned}$$

$$(q_i, p_j) \in \widehat{F} \text{ si y sólo si } q_i \in F_1 \text{ y } p_j \in F_2$$

.

Cerradura bajo intersección II

Falta demostrar que $w \in L_1 \cap L_2$ si y sólo si $\widehat{\delta}^*((q_0, p_0), w) \in \widehat{F}$.

Cerradura bajo intersección II

Falta demostrar que $w \in L_1 \cap L_2$ si y sólo si $\widehat{\delta}^*((q_0, p_0), w) \in \widehat{F}$.

$$w \in L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow$$

Cerradura bajo intersección II

Falta demostrar que $w \in L_1 \cap L_2$ si y sólo si $\widehat{\delta}^*((q_0, p_0), w) \in \widehat{F}$.

$$w \in L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow$$

$$w \in L_1 \text{ y } w \in L_2 \Leftrightarrow$$

Cerradura bajo intersección II

Falta demostrar que $w \in L_1 \cap L_2$ si y sólo si $\widehat{\delta}^*((q_0, p_0), w) \in \widehat{F}$.

$$w \in L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow$$

$$w \in L_1 \text{ y } w \in L_2 \Leftrightarrow$$

$$\delta_1^*(q_0, w) \in F_1 \text{ y } \delta_2^*(p_0, w) \in F_2 \Leftrightarrow$$

Cerradura bajo intersección II

Falta demostrar que $w \in L_1 \cap L_2$ si y sólo si $\widehat{\delta}^*((q_0, p_0), w) \in \widehat{F}$.

$$w \in L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow$$

$$w \in L_1 \text{ y } w \in L_2 \Leftrightarrow$$

$$\delta_1^*(q_0, w) \in F_1 \text{ y } \delta_2^*(p_0, w) \in F_2 \Leftrightarrow$$

$$\widehat{\delta}^*((q_0, p_0), w) \in \widehat{F}$$

Representación estándar

Tenemos diferentes maneras de describir Lenguajes Regulares:

- descripciones verbales informales,
- notación de conjuntos,
- autómatas finitos,
- expresiones regulares y
- gramáticas regulares.

Representación estándar

Tenemos diferentes maneras de describir Lenguajes Regulares:

- descripciones verbales informales,
- notación de conjuntos,
- autómatas finitos,
- expresiones regulares y
- gramáticas regulares.

Definición 2

Un lenguaje regular está dado en una **representación estándar** si y sólo si se describe mediante un autómata finito, una expresión regular o una gramática regular.

Membresía

Teorema 3

Dada una representación estándar de cualquier lenguaje regular L sobre Σ y cualquier $w \in \Sigma^*$, existe un algoritmo para determinar si o no $w \in L$.

Membresía

Teorema 3

Dada una representación estándar de cualquier lenguaje regular L sobre Σ y cualquier $w \in \Sigma^*$, existe un algoritmo para determinar si o no $w \in L$.

Demostración: Representamos el lenguaje por algún AFD, luego vemos si $\delta^*(q_0, w) \in F$.

Vacuidad, finitud e infinitud

Teorema 4

Existe un algoritmo para determinar si un lenguaje regular, dado en representación estándar, es vacío, finito o infinito.

Vacuidad, finitud e infinitud

Teorema 4

Existe un algoritmo para determinar si un lenguaje regular, dado en representación estándar, es vacío, finito o infinito.

Demostración: La respuesta es aparente si representamos el lenguaje como un grafo de un AFD. Si hay un camino del vértice inicial a cualquier vértice final, entonces el lenguaje no es vacío.

Vacuidad, finitud e infinitud

Teorema 4

Existe un algoritmo para determinar si un lenguaje regular, dado en representación estándar, es vacío, finito o infinito.

Demostración: La respuesta es aparente si representamos el lenguaje como un grafo de un AFD. Si hay un camino del vértice inicial a cualquier vértice final, entonces el lenguaje no es vacío.

Para ver si el lenguaje es finito o infinito, encuentre todos los vértices que son la base de algún ciclo. Si esa base es parte de un camino desde el vértice inicial a algún vértice final, entonces el lenguaje es infito, de otra manera es finito.

Igualdad

Teorema 5

Dada una representación estándar de dos lenguajes regulares L_1 y L_2, existe un algoritmo para determinar si o no $L_1 = L_2$.

Igualdad

Teorema 5

Dada una representación estándar de dos lenguajes regulares L_1 y L_2, existe un algoritmo para determinar si o no $L_1 = L_2$.

Demostración: Usando L_1 y L_2 defina el lenguaje

$$L_3 = (L_1 \cap \overline{L_2}) \cup (\overline{L_1} \cap L_2).$$

Igualdad

Teorema 5

Dada una representación estándar de dos lenguajes regulares L_1 y L_2, existe un algoritmo para determinar si o no $L_1 = L_2$.

Demostración: Usando L_1 y L_2 defina el lenguaje

$$L_3 = (L_1 \cap \overline{L_2}) \cup (\overline{L_1} \cap L_2).$$

Por las propiedades de cerradura L_3 es regular y podemos construir un AFD M que lo acepte. Luego podemos usar el algoritmo del Teorema (4) para determinar si L_3 es vacío. Recuerde de teoría de conjuntos que $L_3 = \emptyset$ si y sólo si $L_1 = L_2$.

Observación 6

Si ponemos n objetos en m cajas (casillas) y si $n > m$, entonces al menos una caja contendrá mas de un objeto.

Ejemplo de un lenguaje que no es regular I

Ejemplo 7

¿Es regular el lenguaje $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$?

Ejemplo 7

¿Es regular el lenguaje $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$?

La respuesta es no y lo demostraremos haciendo una demostración por contradicción.

Ejemplo de un lenguaje que no es regular I

Ejemplo 7

¿Es regular el lenguaje $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$?

La respuesta es no y lo demostraremos haciendo una demostración por contradicción.

Suponga que L es regular, entonces existe un AFD $M = (Q, \{a, b\}, \delta, q_0, F)$ que lo reconoce.

Ejemplo 7

¿Es regular el lenguaje $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$?

La respuesta es no y lo demostraremos haciendo una demostración por contradicción.
Suponga que L es regular, entonces existe un AFD $M = (Q, \{a, b\}, \delta, q_0, F)$ que lo reconoce.
Considere $\delta^*(q_0, a^i)$ para $i = 1, 2, 3, \cdots$. Ya que hay un número ilimitado de is, pero sólo un número finito de estados en M, el principio de las casillas nos dice que debe haber un estado, digamos q, tal que

$$\delta^*(q_0, a^n) = q$$

y

$$\delta^*(q_0, a^m) = q$$

con $n \neq m$.

Ejemplo de un lenguaje que no es regular II

Pero ya que M acepta $a^n b^n$ debemos tener que

$$\delta^*(q, b^n) = q_f \in F.$$

Ejemplo de un lenguaje que no es regular II

Pero ya que M acepta $a^n b^n$ debemos tener que

$$\delta^*(q, b^n) = q_f \in F.$$

Así podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_0, a^m b^n) &= \delta^*(\delta^*(q_0, a^m), b^n) \\
&= \delta^*(q, b^n) \\
&= q_f.
\end{aligned}$$

Ejemplo de un lenguaje que no es regular II

Pero ya que M acepta $a^n b^n$ debemos tener que

$$\delta^*(q, b^n) = q_f \in F.$$

Así podemos concluir que

$$\begin{aligned}\delta^*(q_0, a^m b^n) &= \delta^*(\delta^*(q_0, a^m), b^n)\\ &= \delta^*(q, b^n)\\ &= q_f.\end{aligned}$$

Esto contradice la suposición original de que M acepta $a^m b^n$ sólo si $n = m$, con lo cual podemos concluir que L no puede ser regular.

Consideraciones sobre grafos de transición

- Si el grafo de transición no tiene ciclos, el lenguaje es finito y por tanto regular.

Consideraciones sobre grafos de transición

- Si el grafo de transición tiene un ciclo con una etiqueta no vacía, el lenguaje es infinito. Recíprocamente, todo lenguaje regular infinito tiene un AFD con un ciclo.

- Si hay un ciclo, este ciclo puede ser pasado por alto o repetido un número arbitrario de veces. Así, si el ciclo tiene etiqueta v y la cadena $w_1 v w_2$ está en el lenguaje, entonces también deben estar las cadenas $w_1 w_2$, $w_1 v w_2$, $w_1 v v w_2$, $w_1 v v v w_2$ y así sucesivamente.

Consideraciones sobre grafos de transición

- No sabemos donde está el ciclo en el AFD, pero si el AFD tiene m estados, se debe entrar al ciclo en el momento que se lean m símbolos.

Lema de bombeo

Teorema 8

Sea L *un lenguaje regular infinito. Entonces existe algún entero positivo* m *tal que cualquier* $w \in L$ *con* $|w| \geq m$ *se puede descomponer como*

$$w = xyz, |xy| \leq m, |y| \geq 1$$

tal que

$$w_i = xy^i z \tag{1}$$

también está en L *para todo* $i = 0, 1, 2, \cdots$.

Lema de bombeo en palabras

Observación 9

Toda cadena en L suficientemente larga se puede partir en tres partes de tal manera que un número arbitrario de repeticiones de la parte de en medio produce otra cadena en L. Decimos que la cadena de en medio se "bombea", de aquí el nombre del lema.

Lema de bombeo demostración I

Demostración: Si L es regular existe un AFD que lo reconoce. Suponga que dicho AFD tiene estados etiquetados $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n$. Tome una cadena $w \in L$ tal que $|w| \geq m = n + 1$. Como L es infinito siempre podemos tomar una L que cumpla las condiciones dadas.

Lema de bombeo demostración I

Demostración: Si L es regular existe un AFD que lo reconoce. Suponga que dicho AFD tiene estados etiquetados $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n$. Tome una cadena $w \in L$ tal que $|w| \geq m = n + 1$. Como L es infinito siempre podemos tomar una L que cumpla las condiciones dadas.

Considere el conjunto de estados por los que pasa el autómata al procesar w, digamos que

$$q_0, q_i, q_j, \ldots, q_f$$

.

Lema de bombeo demostración I

Demostración: Si L es regular existe un AFD que lo reconoce. Suponga que dicho AFD tiene estados etiquetados $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n$. Tome una cadena $w \in L$ tal que $|w| \geq m = n + 1$. Como L es infinito siempre podemos tomar una L que cumpla las condiciones dadas.

Considere el conjunto de estados por los que pasa el autómata al procesar w, digamos que

$$q_0, q_i, q_j, \ldots, q_f$$

.

Ya que esta secuencia tiene exactamente $|w| + 1$ miembros, al menos uno debe estar repetido y tal repetición no debe iniciar después del n-ésimo movimiento.

Lema de bombeo demostración II

Así, la secuencia se debe ver como

$$q_0, q_i, q_j, \ldots, q_r, \ldots, q_r, \ldots, q_f,$$

indicando que deben existir subcadenas x, y, z de w tales que

$$\begin{aligned} \delta^*(q_0, x) &= q_r, \\ \delta^*(q_r, y) &= q_r, \\ \delta^*(q_r, z) &= q_f, \end{aligned}$$

con $|xy| \leq n + 1 = m, |y| \geq 1$.

Así, la secuencia se debe ver como

$$q_0, q_i, q_j, \ldots, q_r, \ldots, q_r, \ldots, q_f,$$

indicando que deben existir subcadenas x, y, z de w tales que

$$\delta^*(q_0, x) = q_r,$$
$$\delta^*(q_r, y) = q_r,$$
$$\delta^*(q_r, z) = q_f,$$

con $|xy| \leq n + 1 = m, |y| \geq 1.$ De aquí se sigue inmediatamente que

$$\delta^*(q_0, xz) = q_f,$$

así como

$$\delta^*(q_0, xyz) = q_f,$$
$$\delta^*(q_0, xy^2z) = q_f,$$
$$\delta^*(q_0, xy^3z) = q_f,$$

y así sucesivamente, completando la prueba del teorema.

Lema de bombeo ejemplo 1

Ejemplo 10

Use el lema de bombeo para demostrar que $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ no es regular.

Asuma que L es regular, por lo tanto se debe cumplir el lema de bombeo. No conocemos el valor de m, sea el que fuere, podemos elegir $n = m$. Por lo tanto la subcadena y debe consistir de as.

Lema de bombeo ejemplo 1

Ejemplo 10

Use el lema de bombeo para demostrar que $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ no es regular.

Asuma que L es regular, por lo tanto se debe cumplir el lema de bombeo. No conocemos el valor de m, sea el que fuere, podemos elegir $n = m$. Por lo tanto la subcadena y debe consistir de as. Suponga que $|y| = k$. Entonces la cadena obtenida usando $i = 0$ en la ecuación $(w_i = xy^i z)$ es

$$w_0 = a^{m-k} b^m$$

que claramente no está en L. Esto contradice el lema de bombeo y por lo tanto indica que es falsa la suposicion de que L es regular.

Lema de bombeo observaciones

- Tenemos la garantia de que existe un m y la descomposición xyz, pero no sabemos quiénes son.

Lema de bombeo observaciones

- Tenemos la garantia de que existe un m y la descomposición xyz, pero no sabemos quiénes son.
- No podemos pretender que hemos alcanzado una contradicción sólo porque el lema de bombeo es violado para algunos valores específicos de m o xyz.

Lema de bombeo observaciones

- Tenemos la garantia de que existe un m y la descomposición xyz, pero no sabemos quiénes son.
- No podemos pretender que hemos alcanzado una contradicción sólo porque el lema de bombeo es violado para algunos valores específicos de m o xyz.
- Por otro lado, el lema de bombeo se cumple para todo $w \in L$ y todo i. Por lo tanto, si el lema de bombeo es violado por una w o una i, entonces el lenguaje no puede ser regular.

El juego de bombeo

El objetivo es ganar el juego estableciendo una contradicción al lema de bombeo, el oponente trata de frustar nuestro intento.

- El oponente escoge m.

El juego de bombeo

El objetivo es ganar el juego estableciendo una contradicción al lema de bombeo, el oponente trata de frustar nuestro intento.

- El oponente escoge m.
- Dado m, escogemos una $w \in L$ de longitud igual o mayor que m. Tenemos la libertad de escoger cualquier w, garantizando que $|w| \geq m$.

El juego de bombeo

El objetivo es ganar el juego estableciendo una contradicción al lema de bombeo, el oponente trata de frustar nuestro intento.

- El oponente escoge m.
- Dado m, escogemos una $w \in L$ de longitud igual o mayor que m. Tenemos la libertad de escoger cualquier w, garantizando que $|w| \geq m$.
- El oponente elige la descomposición xyz, sujeto a que $|xy| \leq m, |y| \geq 1$. Tenemos que asumir que el oponente hace la elección que nos hará más difícil ganar el juego.

El juego de bombeo

El objetivo es ganar el juego estableciendo una contradicción al lema de bombeo, el oponente trata de frustar nuestro intento.

- El oponente escoge m.
- Dado m, escogemos una $w \in L$ de longitud igual o mayor que m. Tenemos la libertad de escoger cualquier w, garantizando que $|w| \geq m$.
- El oponente elige la descomposición xyz, sujeto a que $|xy| \leq m, |y| \geq 1$. Tenemos que asumir que el oponente hace la elección que nos hará más difícil ganar el juego.
- Tratamos de elegir i de tal manera que la cadena bombeada w_i, definida por la ecuación $w_i = xy^iz$, no esté en L, si lo logramos, ganamos el juego.

Lema de bombeo ejemplo 2

Ejemplo 11

Sea $\Sigma = \{a, b\}$. Demuestre que el lenguje

$$L = \{w \in \Sigma^* : n_a(w) < n_b(w)\}$$

no es regular.

Suponga que nos dan m. Como tenemos completa libertad para elegir w, escogemos $w = a^m b^{m+1}$. Como $|xy|$ no puede ser mayor que m, al oponente no le queda más que escoger una y con puras as, esto es

$$y = a^k, 1 \leq k \leq m.$$

Ejemplo 11

Sea $\Sigma = \{a, b\}$. Demuestre que el lenguje

$$L = \{w \in \Sigma^* : n_a(w) < n_b(w)\}$$

no es regular.

Suponga que nos dan m. Como tenemos completa libertad para elegir w, escogemos $w = a^m b^{m+1}$. Como $|xy|$ no puede ser mayor que m, al oponente no le queda más que escoger una y con puras as, esto es

$$y = a^k, 1 \leq k \leq m.$$

Así tendríamos que $x = a^{m-k}, y = a^k, z = b^{m+1}$, usando la ecuación $(w_i = xy^i z)$ y bombeando con $i = 2$ obtenemos:

$$w_2 = a^{m-k} a^{2k} b^{m+1} = a^{m+k} b^{m+1}$$

que no está en L.

Ejemplo 11

Sea $\Sigma = \{a, b\}$. Demuestre que el lenguje

$$L = \{w \in \Sigma^* : n_a(w) < n_b(w)\}$$

no es regular.

Suponga que nos dan m. Como tenemos completa libertad para elegir w, escogemos $w = a^m b^{m+1}$. Como $|xy|$ no puede ser mayor que m, al oponente no le queda más que escoger una y con puras as, esto es

$$y = a^k, 1 \leq k \leq m.$$

Así tendríamos que $x = a^{m-k}, y = a^k, z = b^{m+1}$, usando la ecuación $(w_i = xy^i z)$ y bombeando con $i = 2$ obtenemos:

$$w_2 = a^{m-k} a^{2k} b^{m+1} = a^{m+k} b^{m+1}$$

que no está en L. Por lo tanto se viola el lema de bombeo y así L no es regular, es decir, ganamos el juego.

Ejercicios

Los ejercicios los deben enviar en pdf a jlavallenator@gmail.com, pueden usar cualquier herramienta (de preferencia LaTeX), en el peor de los casos, si no tienen alternativa, lo hacen con papel y lapiz con letra legible y visible, lo escanean y me lo envían en pdf.

1. Demuestre como a partir de un AFD para L se puede construir un autómata finito para $\overline{L}^*$ (la cerradura estrella del complemento de L).
2. La **diferencia simétrica** de dos conjuntos S_1 y S_2 está definida como

   $$S_1 \ominus S_2 = \{x : x \in S_1 \text{ o } x \in S_2, \text{ pero } x \text{ no está ni en } S_1 \text{ ni en } S_2\}.$$

   Demuestre que la familia de lenguajes regulares es cerrada bajo la diferencia simétrica.
3. Demuestre que los siguientes lenguajes no son regulares
   1. $L = \{a^n b^k c^n : n \geq 0, k \geq 0\}$,
   2. $L = \{a^n b^k c^n : n \geq 0, k \geq n\}$,
   3. $L = \{w : n_a(w) = n_b(w)\}$.