Conexión entre Expresiones Regulares y Lenguajes Regulares

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Lenguajes Formales y Autómatas CCOS 014

Primavera 2021

Contenido

Motivación

- Como sugiere la terminología, la conexión entre los lenguajes regulares y las expresiones regulares es estrecha.

Motivación

- Los dos conceptos son esencialmente los mismos; para cada lenguaje regular hay una expresión regular, y para cada expresión regular hay un lenguaje regular.

Motivación

- Mostraremos esto en dos partes.

$L(r)$ es un lenguaje regular I

- Primero mostramos que si r es una expresión regular, entonces $L(r)$ es un lenguaje regular.

$L(r)$ es un lenguaje regular I

- Nuestra definición dice que un lenguaje es regular si es aceptado por algún dfa.

$L(r)$ es un lenguaje regular I

- Debido a la equivalencia de nfas y dfas, un lenguaje también es regular si es aceptado por algún nfa.

$L(r)$ es un lenguaje regular I

- Ahora demostramos que si tenemos una expresión regular r, podemos construir un nfa que acepte $L(r)$.

$L(r)$ es un lenguaje regular I

- La construcción de esto se basa en la definición recursiva de $L(r)$.

$L(r)$ es un lenguaje regular I

- Primero construimos autómatas simples para las partes 1, 2 y 3 de la definición de $L(r)$, luego mostramos como se pueden combinar para implementar las partes más complicadas 4, 5 y 7.

$L(r)$ es un lenguaje regular II

Teorema 1

Sea r una expresión regular. Entonces existe algún aceptador finito no determinista que acepta $L(r)$. En consecuencia, $L(r)$ es un lenguaje regular.

Demostración: Comenzamos con autómatas que aceptan los lenguajes de las expresiones regulares simples $\emptyset, \lambda$ y $a \in \Sigma$.

Teorema 1

Sea r una expresión regular. Entonces existe algún aceptador finito no determinista que acepta $L(r)$. En consecuencia, $L(r)$ es un lenguaje regular.

Demostración: Comenzamos con autómatas que aceptan los lenguajes de las expresiones regulares simples $\emptyset, \lambda$ y $a \in \Sigma$.

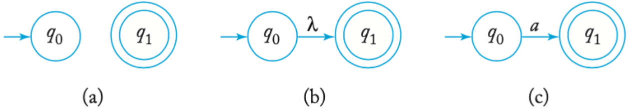

Figura 1: (a) nfa que acepta $\emptyset$, (b) nfa que acepta $\{\lambda\}$, (c) nfa que acepta $\{a\}$.

$L(r)$ es un lenguaje regular III

- Suponga ahora que tenemos autómatas $M(r_1)$ y $M(r_2)$ que aceptan lenguajes denotados por expresiones regulares r_1 y r_2, respectivamente.

- No necesitamos construir explícitamente estos autómatas, pero podemos representarlos esquemáticamente, como en la Figura 2.

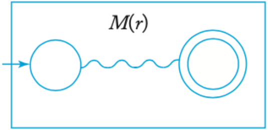

Figura 2: Representación esquemática de un nfa que acepta $L(r)$.

$L(r)$ es un lenguaje regular III

- En este esquema, el vértice del grafo a la izquierda representa el estado inicial, el de la derecha el estado final.

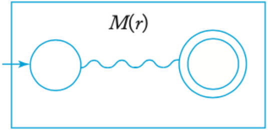

Figura 2: Representación esquemática de un nfa que acepta $L(r)$.

$L(r)$ es un lenguaje regular III

- Afirmamos que para cada nfa hay uno equivalente con un solo estado final, por lo que no perdemos nada al suponer que sólo hay un estado final.

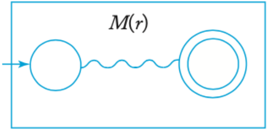

Figura 2: Representación esquemática de un nfa que acepta $L(r)$.

$L(r)$ es un lenguaje regular IV

- Con $M(r_1)$ y $M(r_2)$ representados de esta manera, luego construimos autómatas para las expresiones regulares $r_1 + r_2$, $r_1 r_2$ y r_1^*.

$L(r)$ es un lenguaje regular IV

- Las construcciones se muestran en las Figuras 3 a 5.

$L(r)$ es un lenguaje regular IV

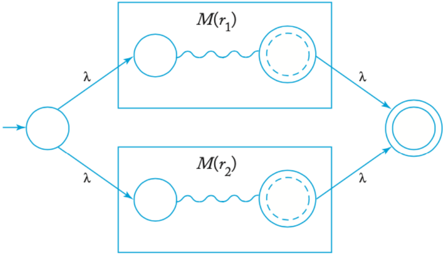

Figura 3: Autómata para $L(r_1 + r_2)$.

$L(r)$ es un lenguaje regular V

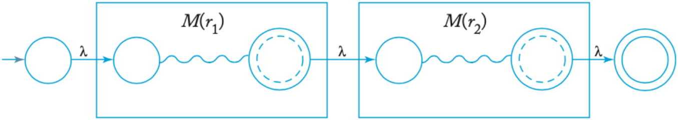

Figura 4: Autómata para $L(r_1 r_2)$.

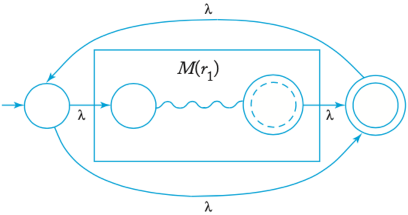

Figura 5: Autómata para $L(r_1^*)$.

$L(r)$ es un lenguaje regular VI

- Como se indica en los dibujos, los estados inicial y final de las máquinas constituyentes pierden su estatus y son reemplazados por nuevos estados inicial y final.

$L(r)$ es un lenguaje regular VI

- Al encadenar varios de estos pasos, podemos construir autómatas para expresiones regulares complejas arbitrarias.

- Debe quedar claro de la interpretación de los grafos en las Figuras 3 a 5 que esta construcción funciona.

$L(r)$ es un lenguaje regular VI

- Pero, para argumentar más rigurosamente, procedemos por inducción sobre los lenguajes que denotan los diferentes tipos de expresiones regulares r.

$L(r)$ es un lenguaje regular (Casos base)

Casos base:

$r = \emptyset$: formalmente podemos escribir el autómata de la Figura 1(a) como $M_\emptyset = (\{q_0, q_1\}, \Sigma, \delta, q_0, \{q_1\})$ con $\delta(q_0, a) = \emptyset$ y $\delta(q_1, a) = \emptyset$, para todo $a \in \Sigma$. Por lo tanto, $L(M_\emptyset) = \emptyset$.

$L(r)$ es un lenguaje regular (Casos base)

Casos base:

$r = \lambda$: formalmente podemos escribir el autómata de la Figura 1(b) como $M_\lambda = (\{q_0, q_1\}, \Sigma, \delta, q_0, \{q_1\})$ con $\delta(q_0, \lambda) = \{q_1\}$ y $\delta(q_1, a) = \emptyset$, para todo $a \in \Sigma$. Por lo tanto, $L(M_\lambda) = \{\lambda\}$.

$L(r)$ es un lenguaje regular (Casos base)

Casos base:

$r = a$: formalmente podemos escribir el autómata de la Figura 1(c) como $M_a = (\{q_0, q_1\}, \Sigma, \delta, q_0, \{q_1\})$ con $\delta(q_0, a) = \{q_1\}$ y $\delta(q_0, b) = \emptyset$, para todo $b \in \Sigma - \{a\}$. Por lo tanto, $L(M_a) = \{a\}$.

$L(r)$ es un lenguaje regular (Hipótesis de inducción)

Hipótesis de inducción: Sean r_1 y r_2 expresiones regulares, como hipótesis de inducción asumimos que existen nfas

$$M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{0_1}, \{q_{f_1}\})$$

y

$$M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{0_2}, \{q_{f_2}\})$$

tales que $L(M_1) = L(r_1)$ y $L(M_2) = L(r_2)$.

Construyamos el autómata para la Figura 3

$$M = (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, q_0, \{q_f\})$$

donde δ está definida por:

$L(r)$ es un lenguaje regular $(r = r_1 + r_2)$ I

Construyamos el autómata para la Figura 3

$$M = (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, q_0, \{q_f\})$$

donde δ está definida por:

1. $\delta(q_0, \lambda) = \{q_{0_1}, q_{0_2}\}$,

Construyamos el autómata para la Figura 3

$$M = (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, q_0, \{q_f\})$$

donde δ está definida por:

1. $\delta(q_0, \lambda) = \{q_{0_1}, q_{0_2}\}$,
2. $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ para $q \in Q_1 - \{q_{f_1}\}$ y $a \in \Sigma_1 \cup \{\lambda\}$,

Construyamos el autómata para la Figura 3

$$M = (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, q_0, \{q_f\})$$

donde δ está definida por:

1. $\delta(q_0, \lambda) = \{q_{0_1}, q_{0_2}\}$,
2. $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ para $q \in Q_1 - \{q_{f_1}\}$ y $a \in \Sigma_1 \cup \{\lambda\}$,
3. $\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$ para $q \in Q_2 - \{q_{f_2}\}$ y $a \in \Sigma_2 \cup \{\lambda\}$,

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 + r_2$) I

Construyamos el autómata para la Figura 3

$$M = (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, q_0, \{q_f\})$$

donde δ está definida por:

1. $\delta(q_0, \lambda) = \{q_{0_1}, q_{0_2}\}$,
2. $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ para $q \in Q_1 - \{q_{f_1}\}$ y $a \in \Sigma_1 \cup \{\lambda\}$,
3. $\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$ para $q \in Q_2 - \{q_{f_2}\}$ y $a \in \Sigma_2 \cup \{\lambda\}$,
4. $\delta(q_{f_1}, \lambda) = \delta(q_{f_2}, \lambda) = \{q_f\}$.

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 + r_2$) II

Así, por hipótesis de inducción, si $x \in L(r_1)$ entonces $x \in L(M_1)$, es decir, $\delta_1^*(q_{0_1}, x) = \{q_{f_1}\}$; de tal manera que

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 + r_2$) II

Así, por hipótesis de inducción, si $x \in L(r_1)$ entonces $x \in L(M_1)$, es decir, $\delta_1^*(q_{0_1}, x) = \{q_{f_1}\}$; de tal manera que

$$\delta^*(q_0, x) = \delta^*(q_0, \lambda x \lambda)$$

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 + r_2$) II

Así, por hipótesis de inducción, si $x \in L(r_1)$ entonces $x \in L(M_1)$, es decir, $\delta_1^*(q_{0_1}, x) = \{q_{f_1}\}$; de tal manera que

$$\begin{aligned}\delta^*(q_0, x) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda)\\ &= \delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda)\end{aligned}$$

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 + r_2$) II

Así, por hipótesis de inducción, si $x \in L(r_1)$ entonces $x \in L(M_1)$, es decir, $\delta_1^*(q_{0_1}, x) = \{q_{f_1}\}$; de tal manera que

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_0, x) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda) \\
&\overset{1}{=} \delta(\delta^*(\{q_{0_1}, q_{0_2}\}, x), \lambda)
\end{aligned}$$

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 + r_2$) II

Así, por hipótesis de inducción, si $x \in L(r_1)$ entonces $x \in L(M_1)$, es decir, $\delta_1^*(q_{0_1}, x) = \{q_{f_1}\}$; de tal manera que

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_0, x) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda) \\
&\stackrel{1}{=} \delta(\delta^*(\{q_{0_1}, q_{0_2}\}, x), \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda) \cup \delta(\delta^*(q_{0_2}, x), \lambda)
\end{aligned}$$

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 + r_2$) II

Así, por hipótesis de inducción, si $x \in L(r_1)$ entonces $x \in L(M_1)$, es decir, $\delta_1^*(q_{0_1}, x) = \{q_{f_1}\}$; de tal manera que

$$
\begin{aligned}
\delta^*(q_0, x) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda) \\
&\overset{1}{=} \delta(\delta^*(\{q_{0_1}, q_{0_2}\}, x), \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda) \cup \delta(\delta^*(q_{0_2}, x), \lambda) \\
&\overset{2}{=} \delta(q_{f_1}, \lambda) \cup \delta(\delta^*(q_{0_2}, x), \lambda)
\end{aligned}
$$

Así, por hipótesis de inducción, si $x \in L(r_1)$ entonces $x \in L(M_1)$, es decir, $\delta_1^*(q_{0_1}, x) = \{q_{f_1}\}$; de tal manera que

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_0, x) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda) \\
&\stackrel{1}{=} \delta(\delta^*(\{q_{0_1}, q_{0_2}\}, x), \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda) \cup \delta(\delta^*(q_{0_2}, x), \lambda) \\
&\stackrel{2}{=} \delta(q_{f_1}, \lambda) \cup \delta(\delta^*(q_{0_2}, x), \lambda) \\
&\stackrel{4}{=} \{q_f\} \cup \delta(\delta^*(q_{0_2}, x), \lambda).
\end{aligned}$$

Así, por hipótesis de inducción, si $x \in L(r_1)$ entonces $x \in L(M_1)$, es decir, $\delta_1^*(q_{0_1}, x) = \{q_{f_1}\}$; de tal manera que

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_0, x) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda) \\
&\stackrel{1}{=} \delta(\delta^*(\{q_{0_1}, q_{0_2}\}, x), \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda) \cup \delta(\delta^*(q_{0_2}, x), \lambda) \\
&\stackrel{2}{=} \delta(q_{f_1}, \lambda) \cup \delta(\delta^*(q_{0_2}, x), \lambda) \\
&\stackrel{4}{=} \{q_f\} \cup \delta(\delta^*(q_{0_2}, x), \lambda).
\end{aligned}$$

por lo tanto $x \in L(M)$.

De manera semejante, por hipótesis de inducción, si $x \in L(r_2)$ entonces $x \in L(M_2)$, es decir, $\delta_2^*(q_{0_2}, x) = \{q_{f_2}\}$; de tal manera que

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 + r_2$) III

De manera semejante, por hipótesis de inducción, si $x \in L(r_2)$ entonces $x \in L(M_2)$, es decir, $\delta_2^*(q_{0_2}, x) = \{q_{f_2}\}$; de tal manera que

$$\delta^*(q_0, x) = \delta^*(q_0, \lambda x \lambda)$$

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 + r_2$) III

De manera semejante, por hipótesis de inducción, si $x \in L(r_2)$ entonces $x \in L(M_2)$, es decir, $\delta_2^*(q_{0_2}, x) = \{q_{f_2}\}$; de tal manera que

$$\begin{aligned}\delta^*(q_0, x) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda)\\ &= \delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda)\end{aligned}$$

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 + r_2$) III

De manera semejante, por hipótesis de inducción, si $x \in L(r_2)$ entonces $x \in L(M_2)$, es decir, $\delta_2^*(q_{0_2}, x) = \{q_{f_2}\}$; de tal manera que

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_0, x) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda) \\
&\stackrel{1}{=} \delta(\delta^*(\{q_{0_1}, q_{0_2}\}, x), \lambda)
\end{aligned}$$

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 + r_2$) III

De manera semejante, por hipótesis de inducción, si $x \in L(r_2)$ entonces $x \in L(M_2)$, es decir, $\delta_2^*(q_{0_2}, x) = \{q_{f_2}\}$; de tal manera que

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_0, x) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda) \\
&\overset{1}{=} \delta(\delta^*(\{q_{0_1}, q_{0_2}\}, x), \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda) \cup \delta(\delta^*(q_{0_2}, x), \lambda)
\end{aligned}$$

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 + r_2$) III

De manera semejante, por hipótesis de inducción, si $x \in L(r_2)$ entonces $x \in L(M_2)$, es decir, $\delta_2^*(q_{0_2}, x) = \{q_{f_2}\}$; de tal manera que

$$
\begin{aligned}
\delta^*(q_0, x) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda) \\
&\stackrel{1}{=} \delta(\delta^*(\{q_{0_1}, q_{0_2}\}, x), \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda) \cup \delta(\delta^*(q_{0_2}, x), \lambda) \\
&\stackrel{3}{=} \delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda) \cup \delta(q_{f_2}, \lambda)
\end{aligned}
$$

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 + r_2$) III

De manera semejante, por hipótesis de inducción, si $x \in L(r_2)$ entonces $x \in L(M_2)$, es decir, $\delta_2^*(q_{0_2}, x) = \{q_{f_2}\}$; de tal manera que

$$
\begin{aligned}
\delta^*(q_0, x) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda) \\
&\stackrel{1}{=} \delta(\delta^*(\{q_{0_1}, q_{0_2}\}, x), \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda) \cup \delta(\delta^*(q_{0_2}, x), \lambda) \\
&\stackrel{3}{=} \delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda) \cup \delta(q_{f_2}, \lambda) \\
&\stackrel{4}{=} \delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda) \cup \{q_f\}.
\end{aligned}
$$

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 + r_2$) III

De manera semejante, por hipótesis de inducción, si $x \in L(r_2)$ entonces $x \in L(M_2)$, es decir, $\delta_2^*(q_{0_2}, x) = \{q_{f_2}\}$; de tal manera que

$$
\begin{aligned}
\delta^*(q_0, x) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda) \\
&\overset{1}{=} \delta(\delta^*(\{q_{0_1}, q_{0_2}\}, x), \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda) \cup \delta(\delta^*(q_{0_2}, x), \lambda) \\
&\overset{3}{=} \delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda) \cup \delta(q_{f_2}, \lambda) \\
&\overset{4}{=} \delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda) \cup \{q_f\}.
\end{aligned}
$$

por lo tanto $x \in L(M)$.

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 + r_2$) III

De manera semejante, por hipótesis de inducción, si $x \in L(r_2)$ entonces $x \in L(M_2)$, es decir, $\delta_2^*(q_{0_2}, x) = \{q_{f_2}\}$; de tal manera que

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_0, x) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda) \\
&\stackrel{1}{=} \delta(\delta^*(\{q_{0_1}, q_{0_2}\}, x), \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda) \cup \delta(\delta^*(q_{0_2}, x), \lambda) \\
&\stackrel{3}{=} \delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda) \cup \delta(q_{f_2}, \lambda) \\
&\stackrel{4}{=} \delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda) \cup \{q_f\}.
\end{aligned}$$

por lo tanto $x \in L(M)$. Así, $L(M) = \{x | x \in L(M_1) \text{ o } x \in L(M_2)\}$,

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 + r_2$) III

De manera semejante, por hipótesis de inducción, si $x \in L(r_2)$ entonces $x \in L(M_2)$, es decir, $\delta_2^*(q_{0_2}, x) = \{q_{f_2}\}$; de tal manera que

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_0, x) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda) \\
&\stackrel{1}{=} \delta(\delta^*(\{q_{0_1}, q_{0_2}\}, x), \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda) \cup \delta(\delta^*(q_{0_2}, x), \lambda) \\
&\stackrel{3}{=} \delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda) \cup \delta(q_{f_2}, \lambda) \\
&\stackrel{4}{=} \delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda) \cup \{q_f\}.
\end{aligned}$$

por lo tanto $x \in L(M)$. Así, $L(M) = \{x | x \in L(M_1) \text{ o } x \in L(M_2)\}$, por lo tanto $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$.

$L(r)$ es un lenguaje regular $(r = r_1 r_2)$ I

Construyamos el autómata para la Figura 4

$$M = (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, q_0, \{q_f\})$$

donde δ está definida por:

Construyamos el autómata para la Figura 4

$$M = (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, q_0, \{q_f\})$$

donde δ está definida por:

1. $\delta(q_0, \lambda) = \{q_{0_1}\}$,

Construyamos el autómata para la Figura 4

$$M = (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, q_0, \{q_f\})$$

donde δ está definida por:

1. $\delta(q_0, \lambda) = \{q_{0_1}\}$,
2. $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ para $q \in Q_1 - \{q_{f_1}\}$ y $a \in \Sigma_1 \cup \{\lambda\}$,

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 r_2$) I

Construyamos el autómata para la Figura 4

$$M = (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, q_0, \{q_f\})$$

donde δ está definida por:

1. $\delta(q_0, \lambda) = \{q_{0_1}\}$,
2. $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ para $q \in Q_1 - \{q_{f_1}\}$ y $a \in \Sigma_1 \cup \{\lambda\}$,
3. $\delta(q_{f_1}, \lambda) = \{q_{0_2}\}$,

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 r_2$) I

Construyamos el autómata para la Figura 4

$$M = (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, q_0, \{q_f\})$$

donde δ está definida por:

1. $\delta(q_0, \lambda) = \{q_{0_1}\}$,
2. $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ para $q \in Q_1 - \{q_{f_1}\}$ y $a \in \Sigma_1 \cup \{\lambda\}$,
3. $\delta(q_{f_1}, \lambda) = \{q_{0_2}\}$,
4. $\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$ para $q \in Q_2 - \{q_{f_2}\}$ y $a \in \Sigma_2 \cup \{\lambda\}$,

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 r_2$) I

Construyamos el autómata para la Figura 4

$$M = (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, q_0, \{q_f\})$$

donde δ está definida por:

1. $\delta(q_0, \lambda) = \{q_{0_1}\}$,
2. $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ para $q \in Q_1 - \{q_{f_1}\}$ y $a \in \Sigma_1 \cup \{\lambda\}$,
3. $\delta(q_{f_1}, \lambda) = \{q_{0_2}\}$,
4. $\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$ para $q \in Q_2 - \{q_{f_2}\}$ y $a \in \Sigma_2 \cup \{\lambda\}$,
5. $\delta(q_{f_2}, \lambda) = \{q_f\}$.

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 r_2$) II

Sean $x \in L(r_1)$ y $y \in L(r_2)$, por hipótesis de inducción aplicada dos veces, tenemos que $x \in L(M_1)$ y $y \in L(M_2)$. Así, $\delta_1^*(q_{0_1}, x) = \{q_{f_1}\}$ y $\delta_2^*(q_{0_2}, y) = \{q_{f_2}\}$, por lo tanto tenemos:

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 r_2$) II

Sean $x \in L(r_1)$ y $y \in L(r_2)$, por hipótesis de inducción aplicada dos veces, tenemos que $x \in L(M_1)$ y $y \in L(M_2)$. Así, $\delta_1^*(q_{0_1}, x) = \{q_{f_1}\}$ y $\delta_2^*(q_{0_2}, y) = \{q_{f_2}\}$, por lo tanto tenemos:

$$\delta^*(q_0, xy) = \delta^*(q_0, \lambda x \lambda y \lambda)$$

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 r_2$) II

Sean $x \in L(r_1)$ y $y \in L(r_2)$, por hipótesis de inducción aplicada dos veces, tenemos que $x \in L(M_1)$ y $y \in L(M_2)$. Así, $\delta_1^*(q_{0_1}, x) = \{q_{f_1}\}$ y $\delta_2^*(q_{0_2}, y) = \{q_{f_2}\}$, por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_0, xy) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda y \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda), y), \lambda)
\end{aligned}$$

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 r_2$) II

Sean $x \in L(r_1)$ y $y \in L(r_2)$, por hipótesis de inducción aplicada dos veces, tenemos que $x \in L(M_1)$ y $y \in L(M_2)$. Así, $\delta_1^*(q_{0_1}, x) = \{q_{f_1}\}$ y $\delta_2^*(q_{0_2}, y) = \{q_{f_2}\}$, por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_0, xy) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda y \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda), y), \lambda) \\
&\overset{1}{=} \delta(\delta^*(\delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda), y), \lambda)
\end{aligned}$$

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 r_2$) II

Sean $x \in L(r_1)$ y $y \in L(r_2)$, por hipótesis de inducción aplicada dos veces, tenemos que $x \in L(M_1)$ y $y \in L(M_2)$. Así, $\delta_1^*(q_{0_1}, x) = \{q_{f_1}\}$ y $\delta_2^*(q_{0_2}, y) = \{q_{f_2}\}$, por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_0, xy) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda y \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda), y), \lambda) \\
&\stackrel{1}{=} \delta(\delta^*(\delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda), y), \lambda) \\
&\stackrel{2}{=} \delta(\delta^*(\delta(q_{f_1}, \lambda), y), \lambda)
\end{aligned}$$

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 r_2$) II

Sean $x \in L(r_1)$ y $y \in L(r_2)$, por hipótesis de inducción aplicada dos veces, tenemos que $x \in L(M_1)$ y $y \in L(M_2)$. Así, $\delta_1^*(q_{0_1}, x) = \{q_{f_1}\}$ y $\delta_2^*(q_{0_2}, y) = \{q_{f_2}\}$, por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_0, xy) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda y \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda), y), \lambda) \\
&\stackrel{1}{=} \delta(\delta^*(\delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda), y), \lambda) \\
&\stackrel{2}{=} \delta(\delta^*(\delta(q_{f_1}, \lambda), y), \lambda) \\
&\stackrel{3}{=} \delta(\delta^*(q_{0_2}, y), \lambda)
\end{aligned}$$

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 r_2$) II

Sean $x \in L(r_1)$ y $y \in L(r_2)$, por hipótesis de inducción aplicada dos veces, tenemos que $x \in L(M_1)$ y $y \in L(M_2)$. Así, $\delta_1^*(q_{0_1}, x) = \{q_{f_1}\}$ y $\delta_2^*(q_{0_2}, y) = \{q_{f_2}\}$, por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_0, xy) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda y \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda), y), \lambda) \\
&\overset{1}{=} \delta(\delta^*(\delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda), y), \lambda) \\
&\overset{2}{=} \delta(\delta^*(\delta(q_{f_1}, \lambda), y), \lambda) \\
&\overset{3}{=} \delta(\delta^*(q_{0_2}, y), \lambda) \\
&\overset{4}{=} \delta(q_{f_2}, \lambda)
\end{aligned}$$

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 r_2$) II

Sean $x \in L(r_1)$ y $y \in L(r_2)$, por hipótesis de inducción aplicada dos veces, tenemos que $x \in L(M_1)$ y $y \in L(M_2)$. Así, $\delta_1^*(q_{0_1}, x) = \{q_{f_1}\}$ y $\delta_2^*(q_{0_2}, y) = \{q_{f_2}\}$, por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_0, xy) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda y \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda), y), \lambda) \\
&\overset{1}{=} \delta(\delta^*(\delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda), y), \lambda) \\
&\overset{2}{=} \delta(\delta^*(\delta(q_{f_1}, \lambda), y), \lambda) \\
&\overset{3}{=} \delta(\delta^*(q_{0_2}, y), \lambda) \\
&\overset{4}{=} \delta(q_{f_2}, \lambda) \\
&\overset{5}{=} \{q_f\}.
\end{aligned}$$

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1 r_2$) II

Sean $x \in L(r_1)$ y $y \in L(r_2)$, por hipótesis de inducción aplicada dos veces, tenemos que $x \in L(M_1)$ y $y \in L(M_2)$. Así, $\delta_1^*(q_{0_1}, x) = \{q_{f_1}\}$ y $\delta_2^*(q_{0_2}, y) = \{q_{f_2}\}$, por lo tanto tenemos:

$$
\begin{aligned}
\delta^*(q_0, xy) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda y \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda), y), \lambda) \\
&\stackrel{1}{=} \delta(\delta^*(\delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda), y), \lambda) \\
&\stackrel{2}{=} \delta(\delta^*(\delta(q_{f_1}, \lambda), y), \lambda) \\
&\stackrel{3}{=} \delta(\delta^*(q_{0_2}, y), \lambda) \\
&\stackrel{4}{=} \delta(q_{f_2}, \lambda) \\
&\stackrel{5}{=} \{q_f\}.
\end{aligned}
$$

De tal forma que $L(M) = \{xy | x \in L(M_1) \text{ y } y \in L(M_2)\}$, Sean $x \in L(r_1)$ y $y \in L(r_2)$, por hipótesis de inducción aplicada dos veces, tenemos que $x \in L(M_1)$ y $y \in L(M_2)$. Así, $\delta_1^*(q_{0_1}, x) = \{q_{f_1}\}$ y $\delta_2^*(q_{0_2}, y) = \{q_{f_2}\}$, por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_0, xy) &= \delta^*(q_0, \lambda x \lambda y \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(\delta^*(\delta(q_0, \lambda), x), \lambda), y), \lambda) \\
&\overset{1}{=} \delta(\delta^*(\delta(\delta^*(q_{0_1}, x), \lambda), y), \lambda) \\
&\overset{2}{=} \delta(\delta^*(\delta(q_{f_1}, \lambda), y), \lambda) \\
&\overset{3}{=} \delta(\delta^*(q_{0_2}, y), \lambda) \\
&\overset{4}{=} \delta(q_{f_2}, \lambda) \\
&\overset{5}{=} \{q_f\}.
\end{aligned}$$

De tal forma que $L(M) = \{xy | x \in L(M_1) \text{ y } y \in L(M_2)\}$, por lo tanto $L(M) = L(M_1)L(M_2)$.

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1^*$) I

Construyamos el autómata para la Figura 5

$$M = (Q_1 \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma_1, \delta, q_0, \{q_f\}),$$

donde δ está dada por

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1^*$) I

Construyamos el autómata para la Figura 5

$$M = (Q_1 \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma_1, \delta, q_0, \{q_f\}),$$

donde δ está dada por

1. $\delta(q_0, \lambda) = \{q_{0_1}, q_f\},$

Construyamos el autómata para la Figura 5

$$M = (Q_1 \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma_1, \delta, q_0, \{q_f\}),$$

donde δ está dada por

1. $\delta(q_0, \lambda) = \{q_{0_1}, q_f\}$,
2. $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$, para todo $q \in Q_1 - \{q_{f_1}\}$ y $a \in \Sigma_1 \cup \{\lambda\}$.

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1^*$) I

Construyamos el autómata para la Figura 5

$$M = (Q_1 \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma_1, \delta, q_0, \{q_f\}),$$

donde δ está dada por

1. $\delta(q_0, \lambda) = \{q_{0_1}, q_f\}$,
2. $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$, para todo $q \in Q_1 - \{q_{f_1}\}$ y $a \in \Sigma_1 \cup \{\lambda\}$.
3. $\delta(q_{f_1}, \lambda) = \{q_f\}$,

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1^*$) I

Construyamos el autómata para la Figura 5

$$M = (Q_1 \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma_1, \delta, q_0, \{q_f\}),$$

donde δ está dada por

1. $\delta(q_0, \lambda) = \{q_{0_1}, q_f\}$,
2. $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$, para todo $q \in Q_1 - \{q_{f_1}\}$ y $a \in \Sigma_1 \cup \{\lambda\}$.
3. $\delta(q_{f_1}, \lambda) = \{q_f\}$,
4. $\delta(q_f, \lambda) = \{q_0\}$,

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1^*$) II

Recuerde que

$$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i,$$

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1^*$) II

Recuerde que

$$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i,$$

donde

$$L^0 = \{\lambda\},$$

Recuerde que

$$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i,$$

donde

$$L^0 = \{\lambda\},$$
$$L^{n+1} = L^n L, n \geq 0.$$

Recuerde que

$$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i,$$

donde

$$L^0 = \{\lambda\},$$
$$L^{n+1} = L^n L, n \geq 0.$$

Por ejemplo,

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1^*$) II

Recuerde que

$$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i,$$

donde

$$L^0 = \{\lambda\},$$
$$L^{n+1} = L^n L, n \geq 0.$$

Por ejemplo,

- L^2 es el lenguaje que se obtiene al concatenar dos palabras de L,

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1^*$) II

Recuerde que

$$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i,$$

donde

$$L^0 = \{\lambda\},$$
$$L^{n+1} = L^n L, n \geq 0.$$

Por ejemplo,

- L^2 es el lenguaje que se obtiene al concatenar dos palabras de L,
- L^3 es el lenguaje que se obtiene al concatenar tres palabras de L y, en general,

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1^*$) II

Recuerde que

$$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i,$$

donde

$$L^0 = \{\lambda\},$$
$$L^{n+1} = L^n L, n \geq 0.$$

Por ejemplo,

- L^2 es el lenguaje que se obtiene al concatenar dos palabras de L,
- L^3 es el lenguaje que se obtiene al concatenar tres palabras de L y, en general,
- L^n es el lenguaje que se obtiene al concatenar n palabras de L.

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1^*$) II

Recuerde que

$$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i,$$

donde

$$L^0 = \{\lambda\},$$
$$L^{n+1} = L^n L, n \geq 0.$$

Por ejemplo,

- L^2 es el lenguaje que se obtiene al concatenar dos palabras de L,
- L^3 es el lenguaje que se obtiene al concatenar tres palabras de L y, en general,
- L^n es el lenguaje que se obtiene al concatenar n palabras de L.
- Por lo tanto, L^* es el lenguaje cuyas palabras son la concatenación de cualquier cantidad de palabras de L.

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1^*$) III

Demostraremos por inducción sobre n que M acepta cualquier $x \in L(M_1)^*$.

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1^*$) III

Demostraremos por inducción sobre n que M acepta cualquier $x \in L(M_1)^*$.

Caso base: Sea $x \in L(M_1)^0$ tenemos que $\delta(q_0, \lambda) \stackrel{1}{=} \{q_{0_1}, q_f\}$, por lo tanto M acepta λ.

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1^*$) III

Demostraremos por inducción sobre n que M acepta cualquier $x \in L(M_1)^*$.

Hipótesis de inducción: M acepta cualquier $x \in L(M_1)^n$.

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1^*$) III

Demostraremos por inducción sobre n que M acepta cualquier $x \in L(M_1)^*$.

Caso inductivo: Sean $x \in L(M_1)^n$ y $w = xy$, para cualquier $y \in L(M_1)$.

$$
\begin{aligned}
\delta^*(q_0, w) &= \delta^*(q_0, x\lambda y\lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(\delta^*(q_0, x), \lambda), y), \lambda) \\
&\overset{h.i.}{=} \delta(\delta^*(\delta(q_f, \lambda), y), \lambda) \\
&\overset{4 \text{ y } 1}{=} \delta(\delta^*(\{q_0, q_{0_1}, q_f\}, y), \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(q_{0_1}, y), \lambda) \\
&\overset{2}{=} \delta(q_{f_1}, \lambda) \\
&\overset{3}{=} q_f.
\end{aligned}
$$

Así, M acepta cualquier $w \in L(M_1)^{n+1}$, para $n \geq 0$.

$L(r)$ es un lenguaje regular ($r = r_1^*$) III

Demostraremos por inducción sobre n que M acepta cualquier $x \in L(M_1)^*$.

Caso inductivo: Sean $x \in L(M_1)^n$ y $w = xy$, para cualquier $y \in L(M_1)$.

$$
\begin{aligned}
\delta^*(q_0, w) &= \delta^*(q_0, x\lambda y\lambda) \\
&= \delta(\delta^*(\delta(\delta^*(q_0, x), \lambda), y), \lambda) \\
&\overset{h.i.}{=} \delta(\delta^*(\delta(q_f, \lambda), y), \lambda) \\
&\overset{4 \text{ y } 1}{=} \delta(\delta^*(\{q_0, q_{0_1}, q_f\}, y), \lambda) \\
&= \delta(\delta^*(q_{0_1}, y), \lambda) \\
&\overset{2}{=} \delta(q_{f_1}, \lambda) \\
&\overset{3}{=} q_f.
\end{aligned}
$$

Así, M acepta cualquier $w \in L(M_1)^{n+1}$, para $n \geq 0$.

Con esto finalmente hemos demostrado que $L(M) = L(M_1)^*$. ■

Ejemplo 1

Encuentre un nfa que acepte $L(r)$ donde

$$r = (a + bb)^*(ba^* + \lambda).$$

Ejemplo 1 I

Ejemplo 1

Encuentre un nfa que acepte $L(r)$ donde

$$r = (a + bb)^*(ba^* + \lambda).$$

- Los autómatas para $(a + bb)^*$ y $(ba^* + \lambda)$, construidos directamente a partir de los primeros principios, se muestran en la Figura 6.

Ejemplo 1 I

Ejemplo 1

Encuentre un nfa que acepte $L(r)$ donde

$$r = (a + bb)^*(ba^* + \lambda).$$

- Al juntarlos usando la construcción del Teorema 1, obtenemos la solución en la Figura 7.

Ejemplo 1 II

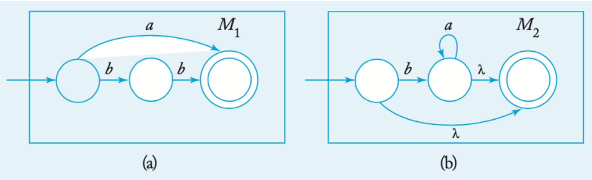

Figura 6: (a) M_1 acepta $L(a + bb)$. (b) acepta $L(ba^* + \lambda)$.

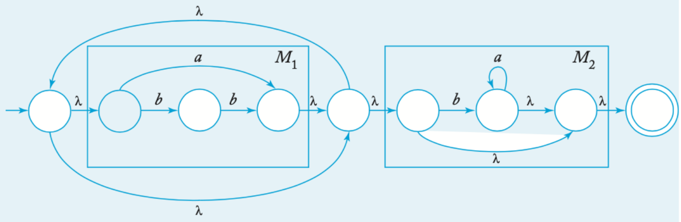

Figura 7: El autómata acepta $L((a + bb)^*(ba^* + \lambda))$.

De dfa a regexp I

Teorema 2

Si L es aceptado por un dfa, entonces L es denotado por una expresión regular.

De dfa a regexp I

Teorema 2

Si L es aceptado por un dfa, entonces L es denotado por una expresión regular.

Demostración:

De dfa a regexp I

Teorema 2

Si L es aceptado por un dfa, entonces L es denotado por una expresión regular.

Demostración:

- Sea L el conjunto aceptado por el dfa

$$M = (\{q_1, \ldots, q_n\}, \Sigma, \delta, q_1, F).$$

De dfa a regexp I

Teorema 2

Si L es aceptado por un dfa, entonces L es denotado por una expresión regular.

Demostración:

- Sea L el conjunto aceptado por el dfa

$$M = (\{q_1, \ldots, q_n\}, \Sigma, \delta, q_1, F).$$

- Sea R_{ij}^k que denota el conjunto de todas las cadenas x tales que $\delta^*(q_i, x) = q_j$ y si $\delta^*(q_i, y) = q_l$ (para cualquier y que es prefijo propio de x, es decir, distinto de x y λ) entonces $l \leq k$.

De dfa a regexp II

- Esto es, R_{ij}^{k} es el conjunto de todas las cadenas que llevan al dfa del estado q_i al estado q_j sin pasar por algún estado cuyo número es mayor que k.

De dfa a regexp II

- Note que “pasar por un estado” significa tanto entrar como salir del estado. Así, i y j pueden ser mayores que k.

De dfa a regexp II

- Ya que no existe un solo estado cuyo número sea mayor que n, R_{ij}^{n} denota todas las cadenas que llevan al dfa de q_i a q_j.

De dfa a regexp II

- Podemos definir R_{ij}^k recursivamente mediante:

$$R_{ij}^k = R_{ik}^{k-1}(R_{kk}^{k-1})^* R_{kj}^{k-1} \cup R_{ij}^{k-1}, \tag{1}$$

$$R_{ij}^0 = \begin{cases} \{a|\delta(q_i,a)=q_j\} & \text{si } i \neq j, \\ \{a|\delta(q_i,a)=q_j\} \cup \{\lambda\} & \text{si } i = j. \end{cases}$$

De dfa a regexp III

- Informalmente, la definición de R_{ij}^{k} significa que las entradas que ocasionan que M vaya de q_i a q_j sin pasar por un estado mayor que q_k están

De dfa a regexp III

- Informalmente, la definición de R_{ij}^{k} significa que las entradas que ocasionan que M vaya de q_i a q_j sin pasar por un estado mayor que q_k están
  1. en R_{ij}^{k-1} (es decir, nunca pasan por un estado tan grande como q_k); o

- Informalmente, la definición de R_{ij}^{k} significa que las entradas que ocasionan que M vaya de q_i a q_j sin pasar por un estado mayor que q_k están
  1. en R_{ij}^{k-1} (es decir, nunca pasan por un estado tan grande como q_k); o
  2. compuestas de una cadena en R_{ik}^{k-1} (que lleva a M a q_k por primera vez) seguida por cero o más cadenas en R_{kk}^{k-1} (que lleva a M de q_k de regreso a q_k sin pasar por el estado q_k o algún otro con numeración mayor) seguido por una cadena en R_{kj}^{k-1} (que lleva a M de q_k a q_j).

De dfa a regexp III

- Debemos demostrar que para cada i, j y k, existe una expresión regular r_{ij}^{k} que denota al lenguaje R_{ij}^{k}.

De dfa a regexp III

- Procedemos por inducción sobre k.

De dfa a regexp IV

Base $k = 0$

- R_{ij}^{0} es un conjunto finito de cadenas las cuales son λ o un único símbolo.

De dfa a regexp IV

Base $k = 0$

- R_{ij}^0 es un conjunto finito de cadenas las cuales son λ o un único símbolo.
- Así r_{ij}^0 se puede escribir como $a_1 + a_2 + \cdots + a_p$ (o $a_1 + a_2 + \cdots + a_p + \lambda$ si $i = j$), donde $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ es el conjunto de símbolos a tales que $\delta(q_i, a) = q_j$.

De dfa a regexp IV

Base $k = 0$

- R_{ij}^0 es un conjunto finito de cadenas las cuales son λ o un único símbolo.
- Así r_{ij}^0 se puede escribir como $a_1 + a_2 + \cdots + a_p$ (o $a_1 + a_2 + \cdots + a_p + \lambda$ si $i = j$), donde $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ es el conjunto de símbolos a tales que $\delta(q_i, a) = q_j$.
- Si no hay tales as, entonces $\emptyset$ (o λ si $i = j$) sirven como r_{ij}^0.

De dfa a regexp IV

Inducción

- La fórmula recursiva para R_{ij}^{k} dada en (1) claramente sólo involucra los operadores de expresiones regulares unión, concatenación y cerradura.

De dfa a regexp IV

Inducción

- La fórmula recursiva para R_{ij}^{k} dada en (1) claramente sólo involucra los operadores de expresiones regulares unión, concatenación y cerradura.
- Por la hipótesis de inducción, para cada l y m existe una expresión regular r_{lm}^{k-1} tal que $L(r_{lm}^{k-1}) = R_{lm}^{k-1}$.

De dfa a regexp IV

Inducción

- La fórmula recursiva para R_{ij}^{k} dada en (1) claramente sólo involucra los operadores de expresiones regulares unión, concatenación y cerradura.
- Por la hipótesis de inducción, para cada l y m existe una expresión regular r_{lm}^{k-1} tal que $L(r_{lm}^{k-1}) = R_{lm}^{k-1}$.
- Así, para r_{ij}^{k} podemos escoger la expresión regular

$$(r_{ik}^{k-1})(r_{kk}^{k-1})^*(r_{kj}^{k-1}) + r_{ij}^{k-1},$$

lo que completa la inducción.

De dfa a regexp V

- Para finalizar la prueba observe que

$$L(M) = \bigcup_{q_j \in F} R_{1j}^{n}$$

ya que R_{1j}^{n} denota las etiquetas de todos los caminos de q_1 a q_j.

$\blacksquare$

De dfa a regexp V

- Para finalizar la prueba observe que

$$L(M) = \bigcup_{q_j \in F} R^n_{1j}$$

ya que R^n_{1j} denota las etiquetas de todos los caminos de q_1 a q_j.

- Así, $L(M)$ es denotado por la expresión regular

$$r^n_{1j_1} + r^n_{1j_2} + \cdots + r^n_{1j_p},$$

donde $F = \{q_{j_1}, q_{j_2}, \ldots, q_{j_p}\}$.

■

Ejemplo 2 I

Ejemplo 2

Sea M el dfa de la Figura 8, obtenga una expresión regular que denote a $L(M)$.

Ejemplo 2

Sea M el dfa de la Figura 8, obtenga una expresión regular que denote a $L(M)$.

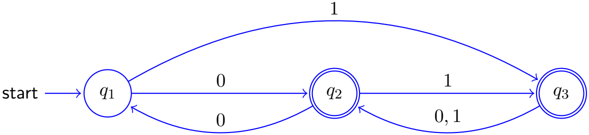

Figura 8: Dfa para el Ejemplo 2.

Ejemplo 2

Sea M el dfa de la Figura 8, obtenga una expresión regular que denote a $L(M)$.

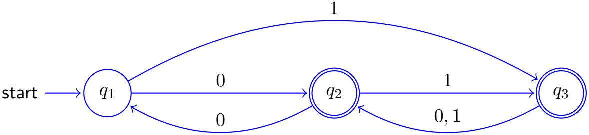

Figura 8: Dfa para el Ejemplo 2.

De acuerdo a la figura tenemos que $F = \{q_2, q_3\}$ y el número de estados es $n = 3$. Por lo tanto la expresión regular que denota a $L(M)$ es

$$r_{12}^3 + r_{13}^3.$$

Ejemplo 2 II

$$
\begin{aligned}
r_{12}^{3} &= r_{13}^{2}(r_{33}^{2})^{*}r_{32}^{2} + r_{12}^{2},\\
r_{13}^{2} &= r_{12}^{1}(r_{22}^{1})^{*}r_{23}^{1} + r_{13}^{1},\\
r_{12}^{1} &= r_{11}^{0}(r_{11}^{0})^{*}r_{12}^{0} + r_{12}^{0}\\
&= \lambda(\lambda)^{*}0 + 0\\
&= 0 + 0 = 0.\\
r_{22}^{1} &= r_{21}^{0}(r_{11}^{0})^{*}r_{12}^{0} + r_{22}^{0}\\
&= 0(\lambda)^{*}0 + \lambda\\
&= 00 + \lambda.\\
r_{23}^{1} &= r_{21}^{0}(r_{11}^{0})^{*}r_{13}^{0} + r_{23}^{0}\\
&= 0(\lambda)^{*}1 + 1\\
&= 01 + 1.\\
r_{13}^{1} &= r_{11}^{0}(r_{11}^{0})^{*}r_{13}^{0} + r_{13}^{0}\\
&= \lambda(\lambda)^{*}1 + 1\\
&= 1 + 1 = 1.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2 III

- Una vez hecho estos cálculos ya podemos resolver r^2_{13}.

$$\begin{aligned} r^2_{13} &= r^1_{12}(r^1_{22})^* r^1_{23} + r^1_{13} \\ &= 0(00+\lambda)^*(01+1)+1 \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 2 III

- Una vez hecho estos cálculos ya podemos resolver r^2_{13}.

$$\begin{aligned} r^2_{13} &= r^1_{12}(r^1_{22})^* r^1_{23} + r^1_{13} \\ &= 0(00+\lambda)^*(01+1)+1 \end{aligned}$$

- Note que $(00+\lambda)^*$ es equivalente a $(00)^*$ y que $(01+1)$ es equivalente a $(0+\lambda)1$, así tenemos

$$r^2_{13} = 0(00)^*(0+\lambda)1 + 1.$$

$\square$

Ejemplo 2 III

- Una vez hecho estos cálculos ya podemos resolver r^2_{13}.

$$\begin{aligned} r^2_{13} &= r^1_{12}(r^1_{22})^* r^1_{23} + r^1_{13} \\ &= 0(00+\lambda)^*(01+1)+1 \end{aligned}$$

- Note que $(00+\lambda)^*$ es equivalente a $(00)^*$ y que $(01+1)$ es equivalente a $(0+\lambda)1$, así tenemos

$$r^2_{13} = 0(00)^*(0+\lambda)1+1.$$

- Ahora observe que $(00)^*(0+\lambda)$ es equivalente a 0^*.

$\square$

Ejemplo 2 III

- Una vez hecho estos cálculos ya podemos resolver r_{13}^2.

$$\begin{aligned} r_{13}^2 &= r_{12}^1(r_{22}^1)^* r_{23}^1 + r_{13}^1 \\ &= 0(00+\lambda)^*(01+1)+1 \end{aligned}$$

- Note que $(00+\lambda)^*$ es equivalente a $(00)^*$ y que $(01+1)$ es equivalente a $(0+\lambda)1$, así tenemos

$$r_{13}^2 = 0(00)^*(0+\lambda)1+1.$$

- Ahora observe que $(00)^*(0+\lambda)$ es equivalente a 0^*.
- Así que $0(00)^*(0+\lambda)1+1$ es equivalente a 00^*1+1 y ésta es equivalente a 0^*1.

$\square$

Ejemplo 2 III

- Una vez hecho estos cálculos ya podemos resolver r_{13}^2.

$$\begin{aligned} r_{13}^2 &= r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 + r_{13}^1 \\ &= 0(00+\lambda)^*(01+1)+1 \end{aligned}$$

- Note que $(00+\lambda)^*$ es equivalente a $(00)^*$ y que $(01+1)$ es equivalente a $(0+\lambda)1$, así tenemos

$$r_{13}^2 = 0(00)^*(0+\lambda)1+1.$$

- Ahora observe que $(00)^*(0+\lambda)$ es equivalente a 0^*.
- Así que $0(00)^*(0+\lambda)1+1$ es equivalente a 00^*1+1 y ésta es equivalente a 0^*1.
- Si bien el procedimiento es bastante claro, también es cierto que es bastante largo hacer todos los cálculos necesarios.

$\square$

Ejercicios

1. Use la construcción del Teorema 1 para encontrar un nfa para cada uno de los siguientes lenguajes.
    1. $L(a^*a + ab)$.
    2. $L((aab)^*ab)$.
    3. $L(ab^*aa + bba^*ab)$.
2. Encuentre una expresión regular que denote al siguiente lenguaje sobre $\{a, b\}$:

$$L = \{w : n_a(w) \text{ y } n_b(w) \text{ ambos son impares}\}.$$

3. Encuentre un dfa que acepte el siguiente lenguaje.

$$L(aa^* + aba^*b^*).$$

4. Haga los cálculos que faltaron en el Ejemplo 2.