# Aceptadores finitos deteministas

**José de Jesús Lavalle Martínez**

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Lenguajes Formales y Autómatas CCOS 014

Primavera 2021

# Contenido

# Motivación I

- Nuestra introducción en el primer capítulo a los conceptos básicos de computación, particularmente la discusión de los autómatas, es breve e informal.

# Motivación I

- Para progresar, debemos ser más precisos, brindar definiciones formales y comenzar a desarrollar resultados rigurosos.

# Motivación I

- Comenzamos con los aceptadores finitos, que son un caso especial simple del esquema general presentado en el capítulo anterior.

# Motivación I

- Este tipo de autómatas se caracteriza por no tener almacenamiento temporal.

# Motivación II

- Dado que un archivo de entrada no se puede reescribir, un autómata finito está severamente limitado en su capacidad para “recordar” cosas durante el cálculo.

# Motivación II

- Se puede retener una cantidad finita de información en la unidad de control colocando la unidad en un estado específico.

- Pero dado que el número de tales estados es finito, un autómata finito solo puede lidiar con situaciones en las que la información que se almacenará en cualquier momento está estrictamente limitada.

# Definición aceptador finito determinista

## Definición 1

Un **aceptador finito determinista** o **dfa** se define por el quintuple $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde

## Definición 1

Un **aceptador finito determinista** o **dfa** se define por el quintuple $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde

- $Q$ es un conjunto finito de estados internos,

# Definición aceptador finito determinista

## Definición 1

Un **aceptador finito determinista** o **dfa** se define por el quintuple $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde

- $Q$ es un conjunto finito de estados internos,
- $\Sigma$ es un conjunto finito de símbolos llamado alfabeto de entrada,

# Definición aceptador finito determinista

## Definición 1

Un **aceptador finito determinista** o **dfa** se define por el quintuple $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde

- $Q$ es un conjunto finito de estados internos,
- $\Sigma$ es un conjunto finito de símbolos llamado alfabeto de entrada,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ es una función total llamada función de transición,

# Definición aceptador finito determinista

## Definición 1

Un **aceptador finito determinista** o **dfa** se define por el quintuple $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde

- $Q$ es un conjunto finito de estados internos,
- $\Sigma$ es un conjunto finito de símbolos llamado alfabeto de entrada,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ es una función total llamada función de transición,
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial,

# Definición aceptador finito determinista

## Definición 1

Un **aceptador finito determinista** o **dfa** se define por el quintuple $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, donde

- $Q$ es un conjunto finito de estados internos,
- $\Sigma$ es un conjunto finito de símbolos llamado alfabeto de entrada,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ es una función total llamada función de transición,
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial,
- $F \subseteq Q$ es un conjunto de estados finales.

# Funcionamiento de un aceptador finito determinista I

- Un aceptador finito determinista opera de la siguiente manera.

# Funcionamiento de un aceptador finito determinista I

- En el momento inicial, se supone que está en el estado inicial $q_0$, con su mecanismo de entrada en el símbolo más a la izquierda de la cadena de entrada.

- Durante cada movimiento del autómata, el mecanismo de entrada avanza una posición hacia la derecha, por lo que cada movimiento consume un símbolo de entrada.

# Funcionamiento de un aceptador finito determinista I

- Cuando se alcanza el final de la cadena, la cadena se acepta si el autómata se encuentra en uno de sus estados finales, de lo contrario, la cadena se rechaza.

- El mecanismo de entrada solo puede moverse de izquierda a derecha y lee exactamente un símbolo en cada paso.

# Funcionamiento de un aceptador finito determinista I

- Las transiciones de un estado interno a otro se rigen por la función de transición $\delta$.

# Funcionamiento de un aceptador finito determinista II

- Por ejemplo, si

$$\delta(q_0, a) = q_1,$$

entonces, si el dfa está en el estado $q_0$ y el símbolo de entrada actual es $a$, el dfa pasará al estado $q_1$.

# Funcionamiento de un aceptador finito determinista II

- Al hablar de los autómatas, es esencial tener una imagen clara e intuitiva con la que trabajar.

# Funcionamiento de un aceptador finito determinista II

- Para visualizar y representar autómatas finitos, utilizamos grafos de transición, en los que los vértices representan estados y las aristas representan transiciones.

# Funcionamiento de un aceptador finito determinista II

- Las etiquetas en los vértices son los nombres de los estados, mientras que las etiquetas en las aristas son los valores actuales del símbolo de entrada.

# Funcionamiento de un aceptador finito determinista III

- Por ejemplo, si $q_0$ y $q_1$ son estados internos de algún dfa $M$, entonces el grafo asociado con $M$ tendrá un vértice etiquetado como $q_0$ y otro etiquetado como $q_1$.

# Funcionamiento de un aceptador finito determinista III

- Una arista etiquetada $(q_0, q_1)$ representa la transición $\delta(q_0, a) = q_1$.

# Funcionamiento de un aceptador finito determinista III

- El estado inicial será identificado por una flecha entrante sin etiqueta que no se origina en ningún vértice.

# Funcionamiento de un aceptador finito determinista III

- Los estados finales se dibujan con un círculo doble.

# Funcionamiento de un aceptador finito determinista IV

- Más formalmente, si $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ es un aceptador finito determinista, entonces su grafo de transición asociado $G_M$ tiene exactamente $|Q|$ vértices, cada uno etiquetado con un $q_i \in Q$ diferente.

# Funcionamiento de un aceptador finito determinista IV

- Para cada regla de transición $\delta(q_i, a) = q_j$, el grafo tiene una arista $(q_i, q_j)$ etiquetada $a$.

# Funcionamiento de un aceptador finito determinista IV

- El vértice asociado con $q_0$ se llama vértice inicial, mientras que los etiquetados con $q_f \in F$ son los vértices finales.

# Funcionamiento de un aceptador finito determinista IV

- Es una cuestión trivial convertir de la definición $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ de un dfa a su representación como grafo de transición y viceversa.

## Ejemplo 1

El grafo de la Figura 1 representa al dfa

$$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q1\}),$$

donde $\delta$ está definida mediante

$$\begin{aligned} \delta(q_0, 0) &= q_0, & \delta(q_0, 1) &= q_1, \\ \delta(q_1, 0) &= q_0, & \delta(q_1, 1) &= q_2, \\ \delta(q_2, 0) &= q_2, & \delta(q_2, 1) &= q_1. \end{aligned}$$

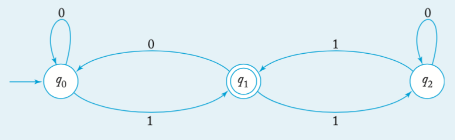
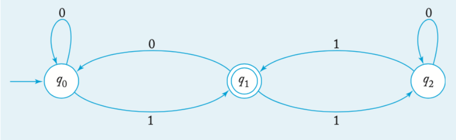
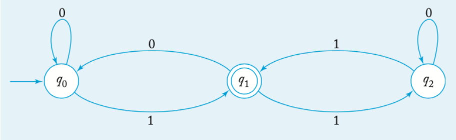



Figura 1: Grafo que representa al autómata del Ejemplo 1.

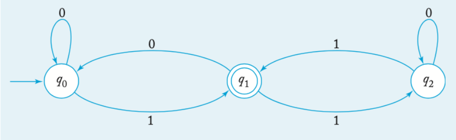



- Este dfa acepta la cadena 01.

# Ejemplo 1 II

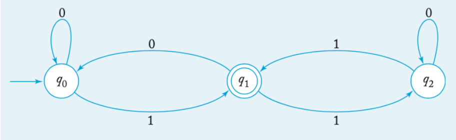



- Comenzando en el estado $q_0$, se lee primero el símbolo 0. Mirando las aristas del grafo, vemos que el autómata permanece en el estado $q_0$.

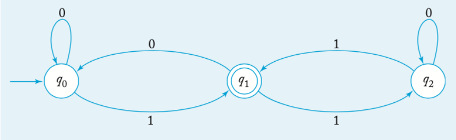



- A continuación, se lee el 1 y el autómata pasa al estado $q_1$.

# Ejemplo 1 II

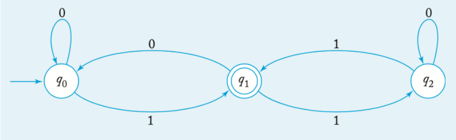



- Ahora estamos al final de la cadena y, al mismo tiempo, en un estado final $q_1$.

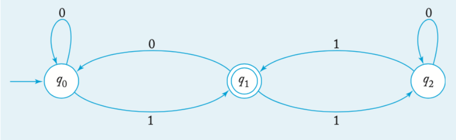



- Por tanto, se acepta la cadena 01.

# Ejemplo 1 II




- El dfa no acepta la cadena 00, ya que después de leer dos ceros consecutivos, estará en el estado $q_0$.




- Con un razonamiento similar, vemos que el autómata aceptará las cadenas 101, 0111 y 11001, pero no 100 ni 1100. □

# Extensión de $\delta$ a cadenas I

- Es conveniente introducir la función de transición extendida $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$.

# Extensión de $\delta$ a cadenas I

- Es conveniente introducir la función de transición extendida $\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$.
- El segundo argumento de $\delta^*$ es una cadena, en lugar de un solo símbolo, y su valor da el estado en el que se encontrará el autómata después de leer esa cadena .

# Extensión de $\delta$ a cadenas I

- Es conveniente introducir la función de transición extendida $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$.
- El segundo argumento de $\delta^*$ es una cadena, en lugar de un solo símbolo, y su valor da el estado en el que se encontrará el autómata después de leer esa cadena .
- Por ejemplo, si

$$\delta(q_0, a) = q_1 \tag{1}$$

y

$$\delta(q_1, b) = q_2, \tag{2}$$

entonces

$$\delta^*(q_0, ab) = q_2.$$

# Extensión de $\delta$ a cadenas II

- Formalmente, podemos definir recursivamente $\delta^*$ mediante

$$\delta^*(q, \lambda) = q, \tag{3}$$

$$\delta^*(q, wa) = \delta(\delta^*(q, w), a), \tag{4}$$

para todo $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$ y $a \in \Sigma$.

## Extensión de $\delta$ a cadenas II

- Formalmente, podemos definir recursivamente $\delta^*$ mediante

$$\delta^*(q, \lambda) = q, \tag{3}$$

$$\delta^*(q, wa) = \delta(\delta^*(q, w), a), \tag{4}$$

para todo $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$ y $a \in \Sigma$.

- Para ver por qué esto es apropiado, apliquemos estas definiciones al caso simple anterior.

$$\begin{aligned} \delta^*(q_0, ab) &\stackrel{4}{=} \delta(\delta^*(q_0, a), b) \\ &\stackrel{4}{=} \delta(\delta(\delta^*(q_0, \lambda), a), b) \\ &\stackrel{3}{=} \delta(\delta(q_0, a), b) \\ &\stackrel{1}{=} \delta(q_1, b) \\ &\stackrel{2}{=} q_2, \end{aligned}$$

como se esperaba.

- Una vez dada una definición precisa de un aceptador, ahora estamos listos para definir formalmente lo que entendemos por lenguaje asociado.

# Definición de lenguaje aceptado por un dfa

- La asociación es obvia: el lenguaje es el conjunto de todas las cadenas aceptadas por el autómata.

# Definición de lenguaje aceptado por un dfa

## Definición 2

El lenguaje aceptado por un dfa $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ es el conjunto de todas las cadenas en $\Sigma$ aceptadas por $M$. En notación formal,

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* : \delta^*(q_0, w) \in F\}.$$

# Lenguajes y DFAs II

- Tenga en cuenta que requerimos que $\delta$, y en consecuencia $\delta^*$, sean funciones totales.
- En cada paso, se define un movimiento único, por lo que se justifica llamar determinista a dicho autómata.
- Un dfa procesará cada cadena en $\Sigma^*$ y la aceptará o no la aceptará.
- No aceptación significa que el dfa se detiene en un estado no final, de modo que

$$\overline{L(M)} = \{w \in \Sigma^* : \delta^*(q_0, w) \notin F\}.$$

# Ejemplo 2 I

## Ejemplo 2

Considere el dfa en la Figura 2.

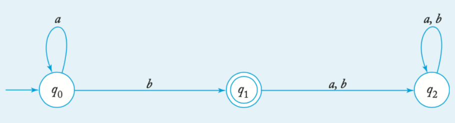



Figura 2: Grafo que representa al autómata del Ejemplo 2.

- Al dibujar la Figura 2 permitimos el uso de dos etiquetas en una sola arista.

## Ejemplo 2

Considere el dfa en la Figura 2.

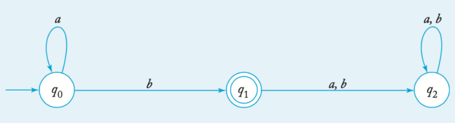



Figura 2: Grafo que representa al autómata del Ejemplo 2.

- Estas aristas con etiquetas múltiples son una forma abreviada de dos o más transiciones distintas:

## Ejemplo 2

Considere el dfa en la Figura 2.

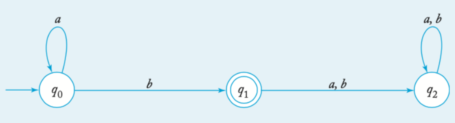
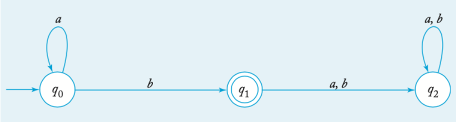



Figura 2: Grafo que representa al autómata del Ejemplo 2.

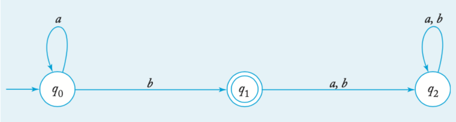
- La transición se toma siempre que el símbolo de entrada coincide con cualquiera de las etiquetas de la arista.

# Ejemplo 2 II



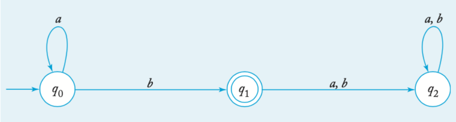

- El autómata de la Figura 2 permanece en su estado inicial $q_0$ hasta que se encuentra la primera $b$.

# Ejemplo 2 II



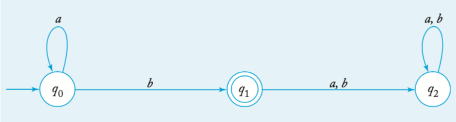

- Si éste es también el último símbolo de la entrada, entonces se acepta la cadena.

# Ejemplo 2 II



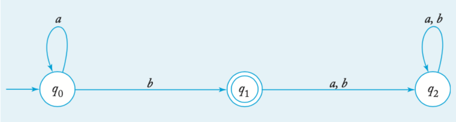

- De lo contrario, el dfa entra en el estado $q_2$, del que nunca podrá escapar.

# Ejemplo 2 II



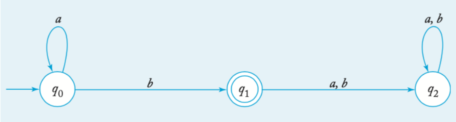

- El estado $q_2$ es un estado trampa.

# Ejemplo 2 II



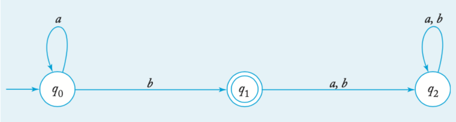

- Vemos claramente en el grafo que el autómata acepta todas las cadenas que constan de un número arbitrario de $a$s, seguidas de una sola $b$.

# Ejemplo 2 II




- Todas las demás cadenas de entrada se rechazan.

# Ejemplo 2 II




- En notación de conjuntos, el lenguaje aceptado por el autómata es

$$L = \{a^n b : n \geq 0\}.$$

$\square$

# Correspondencia entre autómatas y grafos I

- Estos ejemplos muestran lo convenientes que son los grafos de transición para trabajar con autómatas finitos.

# Correspondencia entre autómatas y grafos I

- Si bien es posible basar todos los argumentos estrictamente en las propiedades de la función de transición y su extensión a través de (3) y (4), los resultados son difíciles de seguir.

# Correspondencia entre autómatas y grafos I

- En nuestra discusión, usamos grafos, que son más intuitivos, en la medida de lo posible.

# Correspondencia entre autómatas y grafos I

- Para hacerlo, debemos, por supuesto, tener cierta seguridad de que la representación no nos engañará y de que los argumentos basados en grafos son tan válidos como los que utilizan las propiedades formales de $\delta$.

## Correspondencia entre autómatas y grafos I

- El siguiente resultado preliminar nos da esta seguridad.

# Correspondencia entre autómatas y grafos II

## Teorema 1

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un aceptador finito determinista, y sea $G_M$ su grafo de transición asociado. Entonces, para cada $q_i, q_j \in Q$ y $w \in \Sigma^+, \delta^*(q_i, w) = q_j$ si y sólo si en $G_M$ hay una camino con etiqueta $w$ de $q_i$ a $q_j$.

## Teorema 1

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un aceptador finito determinista, y sea $G_M$ su grafo de transición asociado. Entonces, para cada $q_i, q_j \in Q$ y $w \in \Sigma^+, \delta^*(q_i, w) = q_j$ si y sólo si en $G_M$ hay una camino con etiqueta $w$ de $q_i$ a $q_j$.

- **Prueba:** Esta afirmación es bastante obvia al examinar casos tan simples como el Ejemplo 1.

# Correspondencia entre autómatas y grafos II

### Teorema 1

Sea $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un aceptador finito determinista, y sea $G_M$ su grafo de transición asociado. Entonces, para cada $q_i, q_j \in Q$ y $w \in \Sigma^+, \delta^*(q_i, w) = q_j$ si y sólo si en $G_M$ hay una camino con etiqueta $w$ de $q_i$ a $q_j$.

- Puede demostrarse rigurosamente utilizando inducción sobre la longitud de $w$.

## Correspondencia entre autómatas y grafos III

- Suponga que la afirmación es verdadera para todas las cadenas $v$ con $|v| \leq n$.

## Correspondencia entre autómatas y grafos III

- Suponga que la afirmación es verdadera para todas las cadenas $v$ con $|v| \leq n$.
- Considere entonces cualquier $w$ de longitud $n+1$ y escríbala como

$$w = va.$$

# Correspondencia entre autómatas y grafos III

- Suponga que la afirmación es verdadera para todas las cadenas $v$ con $|v| \leq n$.
- Considere entonces cualquier $w$ de longitud $n+1$ y escríbala como

$$w = va.$$

- Supongamos ahora que $\delta^*(q_i, v) = q_k$.

- Suponga que la afirmación es verdadera para todas las cadenas $v$ con $|v| \leq n$.
- Considere entonces cualquier $w$ de longitud $n+1$ y escríbala como

$$w = va.$$

- Supongamos ahora que $\delta^*(q_i, v) = q_k$.
- Dado que $|v| = n$, debe haber un camino en $G_M$ etiquetado con $v$ de $q_i$ a $q_k$.

# Correspondencia entre autómatas y grafos III

- Suponga que la afirmación es verdadera para todas las cadenas $v$ con $|v| \leq n$.
- Considere entonces cualquier $w$ de longitud $n+1$ y escríbala como

$$w = va.$$

- Supongamos ahora que $\delta^*(q_i, v) = q_k$.
- Dado que $|v| = n$, debe haber un camino en $G_M$ etiquetado con $v$ de $q_i$ a $q_k$.
- Pero si $\delta^*(q_i, w) = q_j$, entonces $M$ debe tener una transición $\delta(q_k, a) = q_j$, de modo que por construcción $G_M$ tiene una arista $(q_k, q_j)$ con etiqueta $a$.

# Correspondencia entre autómatas y grafos IV

- Por lo tanto, hay un camino en $G_M$ etiquetado con $va = w$ entre $q_i$ y $q_j$.

$\blacksquare$

# Correspondencia entre autómatas y grafos IV

- Por lo tanto, hay un camino en $G_M$ etiquetado con $va = w$ entre $q_i$ y $q_j$.
- Dado que el resultado es obviamente cierto para $n = 1$, podemos afirmar por inducción que, para todo $w \in \Sigma^+$,

$\blacksquare$

- Por lo tanto, hay un camino en $G_M$ etiquetado con $va = w$ entre $q_i$ y $q_j$.
- Dado que el resultado es obviamente cierto para $n = 1$, podemos afirmar por inducción que, para todo $w \in \Sigma^+$,
-
$$\delta^*(q_i, w) = q_j \tag{5}$$

implica que hay un camino en $G_M$ de $q_i$ a $q_j$ etiquetado con $w$.

■

- Por lo tanto, hay un camino en $G_M$ etiquetado con $va = w$ entre $q_i$ y $q_j$.
- Dado que el resultado es obviamente cierto para $n = 1$, podemos afirmar por inducción que, para todo $w \in \Sigma^+$,
- $$\delta^*(q_i, w) = q_j \tag{5}$$

  implica que hay un camino en $G_M$ de $q_i$ a $q_j$ etiquetado con $w$.
- El argumento se puede invertir de una manera sencilla para mostrar que la existencia de tal camino implica (5), completando así la prueba.

■

# Correspondencia entre autómatas y grafos V

- Nuevamente, el resultado del teorema es tan intuitivamente obvio que una demostración formal parece innecesaria.

## Correspondencia entre autómatas y grafos V

- Revisamos los detalles por dos razones.

- Revisamos los detalles por dos razones.
  - La primera es que es un ejemplo simple pero típico de una prueba inductiva en relación con los autómatas.

- Revisamos los detalles por dos razones.
  - La segunda es que el resultado se usará una y otra vez, por lo que afirmarlo y demostrarlo como un teorema nos permite argumentar con bastante confianza usando grafos.

# Correspondencia entre autómatas y grafos V

- Esto hace que nuestros ejemplos y pruebas sean más transparentes de lo que serían si usáramos las propiedades de $\delta^*$.

- Si bien los grafos son convenientes para visualizar autómatas, también son útiles otras representaciones.

# Representación de autómatas mediante tablas

- Por ejemplo, podemos representar la función $\delta$ como una tabla.

- La Tabla 1 es equivalente al grafo de la Figura 2.

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $q_0$ | $q_0$ | $q_1$ |
| $q_1$ | $q_2$ | $q_2$ |
| $q_2$ | $q_2$ | $q_2$ |

Tabla 1: Tabla equivalente al grafo de la Figura 2.

- Aquí, la etiqueta de la fila es el estado actual, mientras que la etiqueta de la columna representa el símbolo de entrada actual.

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $q_0$ | $q_0$ | $q_1$ |
| $q_1$ | $q_2$ | $q_2$ |
| $q_2$ | $q_2$ | $q_2$ |

Tabla 1: Tabla equivalente al grafo de la Figura 2.

- La entrada en la tabla define el siguiente estado.

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $q_0$ | $q_0$ | $q_1$ |
| $q_1$ | $q_2$ | $q_2$ |
| $q_2$ | $q_2$ | $q_2$ |

Tabla 1: Tabla equivalente al grafo de la Figura 2.

# Ejemplo 3 I

## Ejemplo 3

Encuentre un aceptador finito determinista que reconozca el conjunto de todas las cadenas en $\Sigma = \{a, b\}$ comenzando con el prefijo $ab$.

- El único problema aquí son los dos primeros símbolos de la cadena; una vez leídas, no se necesitan más decisiones.

### Ejemplo 3

Encuentre un aceptador finito determinista que reconozca el conjunto de todas las cadenas en $\Sigma = \{a, b\}$ comenzando con el prefijo $ab$.

- Aún así, el autómata tiene que procesar toda la cadena antes de tomar su decisión.

### Ejemplo 3

Encuentre un aceptador finito determinista que reconozca el conjunto de todas las cadenas en $\Sigma = \{a, b\}$ comenzando con el prefijo $ab$.

- Por lo tanto, podemos resolver el problema con un autómata que tiene cuatro estados: un estado inicial, dos estados para reconocer $ab$ que termina en un estado de trampa final y un estado de trampa no final.

# Ejemplo 3 II

- Si el primer símbolo es una $a$ y el segundo es una $b$, el autómata pasa al estado de trampa final, donde permanecerá ya que el resto de la entrada no importa.

# Ejemplo 3 II

- Si el primer símbolo es una $a$ y el segundo es una $b$, el autómata pasa al estado de trampa final, donde permanecerá ya que el resto de la entrada no importa.
- Por otro lado, si el primer símbolo no es una $a$ o el segundo no es una $b$, el autómata entra en el estado de trampa no final.

## Ejemplo 3 II

- Si el primer símbolo es una $a$ y el segundo es una $b$, el autómata pasa al estado de trampa final, donde permanecerá ya que el resto de la entrada no importa.
- Por otro lado, si el primer símbolo no es una $a$ o el segundo no es una $b$, el autómata entra en el estado de trampa no final.
- La solución simple se muestra en la Figura 3.

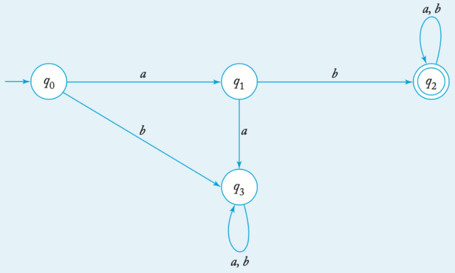



Figura 3: Grafo que representa al autómata del Ejemplo 3.

## Ejemplo 4

Busque un dfa que acepte todas las cadenas en 0,1, excepto las que contengan la subcadena 001.

- Al decidir si se ha producido la subcadena 001, necesitamos saber no sólo el símbolo de entrada actual, sino también recordar si ha sido o no precedido por uno o dos ceros.

## Ejemplo 4

Busque un dfa que acepte todas las cadenas en 0,1, excepto las que contengan la subcadena 001.

- Podemos realizar un seguimiento de esto poniendo el autómata en estados específicos y etiquetándolos en consecuencia.

# Ejemplo 4 I

## Ejemplo 4

Busque un dfa que acepte todas las cadenas en 0,1, excepto las que contengan la subcadena 001.

- Al igual que los nombres de variables en un lenguaje de programación, los nombres de estado son arbitrarios y se pueden elegir por razones mnemotécnicas.

### Ejemplo 4

Busque un dfa que acepte todas las cadenas en 0,1, excepto las que contengan la subcadena 001.

- Por ejemplo, el estado en el que dos 0 eran los símbolos inmediatamente anteriores se puede etiquetar simplemente como 00.

# Ejemplo 4 II

- Si la cadena comienza con 001, debe rechazarse.

- Esto implica que debe haber una ruta etiquetada como 001 desde el estado inicial a un estado no final.

# Ejemplo 4 II

- Por conveniencia, este estado no final está etiquetado como 001.

# Ejemplo 4 II

- Este estado debe ser un estado de trampa, porque los símbolos posteriores no importan.

## Ejemplo 4 II

- Todos los demás estados son estados de aceptación.

# Ejemplo 4 II

- Esto nos da la estructura básica de la solución, pero aún debemos agregar provisiones para la subcadena 001 que ocurre en el medio de la entrada.

# Ejemplo 4 II

- Debemos definir $Q$ y $\delta$ de modo que el autómata recuerde todo lo que necesitemos para tomar la decisión correcta.

# Ejemplo 4 III

- En este caso, cuando se lee un símbolo, necesitamos saber alguna parte de la cadena a la izquierda, por ejemplo, si los dos símbolos anteriores eran 00 o no.

# Ejemplo 4 III

- Si etiquetamos los estados con los símbolos relevantes, es muy fácil para ver cuáles deben ser las transiciones.

# Ejemplo 4 III

- Por ejemplo,

$$\delta(00, 0) = 00$$

porque esta situación surge sólo si hay tres ceros consecutivos.

# Ejemplo 4 III

- Sólo nos interesan los dos últimos, un hecho que recordamos al mantener el dfa en el estado 00.

- En la Figura 4 se muestra una solución completa.

# Ejemplo 4 IV

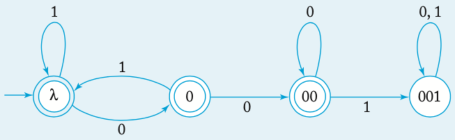



Figura 4: Grafo que representa al autómata del Ejemplo 4.

# Ejemplo 4 IV

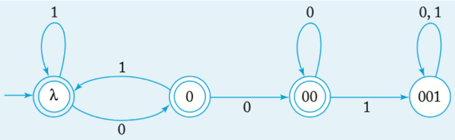



Figura 4: Grafo que representa al autómata del Ejemplo 4.

- Vemos en este ejemplo lo útiles que son las etiquetas mnemotécnicas en los estados para realizar un seguimiento de las cosas.

# Ejemplo 4 IV

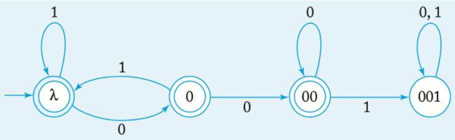



Figura 4: Grafo que representa al autómata del Ejemplo 4.

- Rastree algunas cadenas, como 100100 y 1010100, para ver que la solución sea correcta.

- Todo autómata finito acepta algún lenguaje.

- Si consideramos todos los posibles autómatas finitos, obtenemos un conjunto de lenguajes asociados con ellos.

- Llamaremos familia a ese conjunto de lenguajes.

# Lenguajes Regulares I

- La familia de lenguajes que aceptan los aceptadores finitos deterministas es bastante limitada.

- La estructura y propiedades de los lenguajes de esta familia se aclararán a medida que avance nuestro estudio; por el momento simplemente asignaremos un nombre a esta familia.

## Definición 3

Un lenguaje $L$ se llama *regular* si y sólo si existe algún aceptador finito determinista $M$ tal que

$$L = L(M).$$

# Ejemplo 5 I

## Ejemplo 5

Muestre que el lenguaje

$$L = \{awa; w \in \{a,b\}^*\}$$

es regular.

- Para demostrar que este o cualquier otro lenguaje es regular, todo lo que tenemos que hacer es encontrar un dfa para ello.

# Ejemplo 5 I

## Ejemplo 5

Muestre que el lenguaje

$$L = \{awa; w \in \{a, b\}^*\}$$

es regular.

- La construcción de un dfa para este lenguaje es similar al Ejemplo 3, pero un poco más complicada.

# Ejemplo 5 I

## Ejemplo 5

Muestre que el lenguaje

$$L = \{awa; w \in \{a,b\}^*\}$$

es regular.

- Lo que debe hacer este dfa es verificar si una cadena comienza y termina con una $a$; lo que está en medio es inmaterial.

# Ejemplo 5 II

- La solución se complica por el hecho de que no hay una forma explícita de probar el final de la cadena.

# Ejemplo 5 II

- Esta dificultad se supera simplemente poniendo el dfa en un estado final siempre que se encuentre la segunda $a$.

# Ejemplo 5 II

- Si este no es el final de la cadena y se encuentra otra $b$, el dfa saldrá del estado final.

# Ejemplo 5 II

- El escaneo continúa de esta manera, cada uno llevando al autómata a su estado final.

# Ejemplo 5 II

- La solución completa se muestra en la Figura 5.

# Ejemplo 5 II

- Nuevamente, rastree algunos ejemplos para ver por qué esto funciona.

# Ejemplo 5 II

- Después de una o dos pruebas, será obvio que la dfa acepta una cadena si y sólo si comienza y termina con una $a$.

- Dado que hemos construido un dfa para el lenguaje, podemos afirmar que, por definición, el lenguaje es regular.

# Ejemplo 5 III

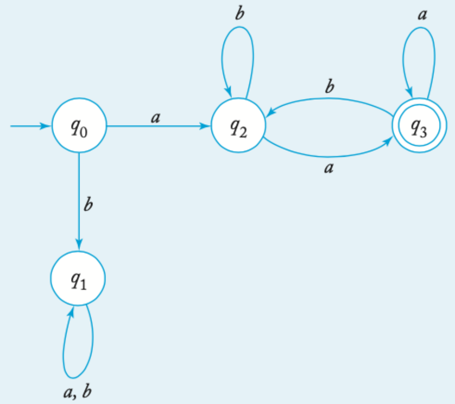



Figura 5: Grafo que representa al autómata del Ejemplo 5.

# Ejemplo 6 I

## Ejemplo 6

Sea $L$ el lenguaje del Ejemplo 5, muestre que $L^2$ es regular.

- Nuevamente mostramos que el lenguaje es regular construyendo un dfa para él.

## Ejemplo 6

Sea $L$ el lenguaje del Ejemplo 5, muestre que $L^2$ es regular.

- Podemos escribir una expresión explícita para $L_2$, a saber,

$$L^2 = \{aw_1aaw_2a : w_1, w_2 \in \{a,b\}^*\}.$$

## Ejemplo 6

Sea $L$ el lenguaje del Ejemplo 5, muestre que $L^2$ es regular.

- Por lo tanto, necesitamos un dfa que reconozca dos cadenas consecutivas de esencialmente la misma forma (pero no necesariamente idénticas en valor).

## Ejemplo 6 I

### Ejemplo 6

Sea $L$ el lenguaje del Ejemplo 5, muestre que $L^2$ es regular.

- El diagrama de la Figura 5 se puede utilizar como punto de partida, pero el vértice $q_3$ debe modificarse.

## Ejemplo 6

Sea $L$ el lenguaje del Ejemplo 5, muestre que $L^2$ es regular.

- Este estado ya no puede ser final ya que, en este punto, debemos empezar a buscar una segunda subcadena de la forma $awa$.

# Ejemplo 6 II

- Para reconocer la segunda subcadena, replicamos los estados de la primera parte (con nuevos nombres), con $q_3$ como comienzo de la segunda parte.

# Ejemplo 6 II

- Dado que la cadena completa se puede dividir en sus partes constituyentes dondequiera que ocurra $aa$, permitimos que la primera aparición de dos a consecutivas sea el disparador que lleva al autómata a su segunda parte.

# Ejemplo 6 II

- Podemos hacer esto haciendo $\delta(q_3, a) = q_4$.

# Ejemplo 6 II

- La solución completa está en la Figura 6.

# Ejemplo 6 II

- Este dfa acepta $L^2$, que por lo tanto es regular.

# Ejemplo 6 III

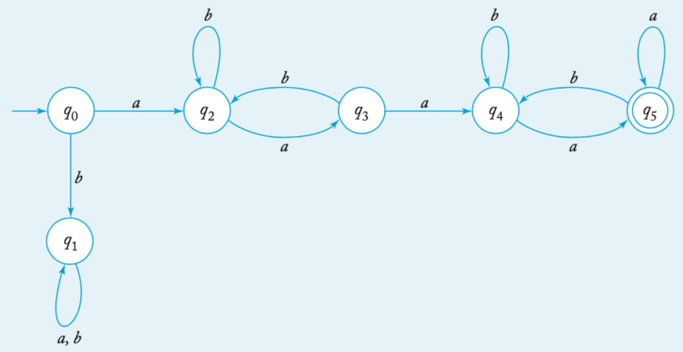



Figura 6: Grafo que representa al autómata del Ejemplo 6.

# Ejercicios I

1. ¿Cuáles de las cadenas 0001, 01101, 00001101 son aceptadas por el dfa en la Figura 1?
2. Traduzca la gráfica de la Figura 4 a notación $\delta$.
3. Para $\Sigma = \{a, b\}$, construya dfa's que acepten los conjuntos que consisten de
    1. todas las cadenas con un número par de símbolos $a$.
    2. todas las cadenas con un número par de símbolos $a$ y un número impar de símbolos $b$.
    3. todas las cadenas con al menos un símbolo $b$ y exactamente dos símbolos $a$.
    4. todas las cadenas con exactamente dos símbolos $a$ y más de tres símbolos $b$.
4. Construya dfas para los siguientes lenguajes sobre $\Sigma = \{a, b\}$.
    1. $L = \{ab^4wb^2 : w \in \{a, b\}^*\}$.
    2. $L = \{ab^na^m : n \geq 3, m \geq 2\}$.
    3. $L = \{w : |w| \mod 3 \neq 0\}$.
    4. $L = \{w : |w| \mod 5 = 0\}$.

# Ejercicios II

5. Demuestre que si cambiamos la Figura 5, haciendo $q_3$ un estado no final y haciendo $q_0, q_1, q_2$ estados finales, el dfa resultante acepta $L$.
6. Generalice la observación en el ejercicio previo. Específicamente, demuestre que si $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ y $\widehat{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$ son dos dfas, entonces $\overline{L(M)} = L(\widehat{M})$.
7. Use las ecuaciones (3) y (4) para demostrar que

$$\delta^*(q, wv) = \delta^*(\delta^*(q, w), v)$$

para toda $w, v \in \Sigma^*$.