# Análisis de Algoritmos II

**José de Jesús Lavalle Martínez**

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Maestría en Ciencias de la Computación
Análisis y Diseño de Algoritmos
MCOM 20300

Otoño 2020

# Contenido

# Motivación

- El último paso indispensable en el análisis de algoritmos es saber resolver **ecuaciones de recurrencia** (como se ha visto en presentaciones anteriores).

# Motivación

- Con un poco de experiencia e intuición la mayoría de las recurrencias se pueden resolver haciendo *conjeturas inteligentes*.

# Motivación

- No obstante, existe una técnica poderosa que se puede usar para resolver ciertas clases de recurrencia casi automáticamente.

# Motivación

- Este es el tópico principal de esta presentación: la **técnica de la ecuación caraterística**.

# Recurrencias homogéneas I

Empezaremos nuestro estudio de la **técnica de la ecuación caraterística** con la resolución de recurrencias lineales homogéneas con coeficientes constantes, es decir recurrencias de la forma

# Recurrencias homogéneas I

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0 \tag{1}$$

# Recurrencias homogéneas I

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0 \qquad (1)$$

- donde los $t_i$ son los valores que estamos buscando.
- Además de la Ecuación (1), los valores de $t_i$ sobre $k$ valores de $i$ (generalmente $0 \leq i \leq k-1$ o $1 \leq i \leq k$) son necesarios para determinar la secuencia.
- Estas **condiciones iniciales** se considerarán más adelante. Hasta entonces, la Ecuación (1) normalmente tiene infinitas soluciones.

# Recurrencias homogéneas II

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$$

Esta recurrencia es:

# Recurrencias homogéneas II

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$$

Esta recurrencia es:

- lineal porque no contiene términos de la forma $t_{n-i}t_{n-j}, t_{n-i}^2$, etc;

# Recurrencias homogéneas II

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$$

Esta recurrencia es:

- lineal porque no contiene términos de la forma $t_{n-i}t_{n-j}, t_{n-i}^2$, etc;
- homogénea porque las combinaciones lineales de las $t_{n-i}$ son iguales a cero; y

# Recurrencias homogéneas II

$$a_0t_n + a_1t_{n-1} + \cdots + a_kt_{n-k} = 0$$

Esta recurrencia es:

- lineal porque no contiene términos de la forma $t_{n-i}t_{n-j}, t_{n-i}^2$, etc;
- homogénea porque las combinaciones lineales de las $t_{n-i}$ son iguales a cero; y
- con coeficientes constantes porque las $a_i$ son constantes.

# Recurrencias homogéneas III

Considere nuestra ahora familiar recurrencia de la secuencia de Fibonacci.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

# Recurrencias homogéneas III

Considere nuestra ahora familiar recurrencia de la secuencia de Fibonacci.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Esta recurrencia fácilmente se puede poner en la forma

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$$

# Recurrencias homogéneas III

Considere nuestra ahora familiar recurrencia de la secuencia de Fibonacci.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Esta recurrencia fácilmente se puede poner en la forma

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$$

después de hacer la reescritua obvia.

$$f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$$

# Recurrencias homogéneas III

Considere nuestra ahora familiar recurrencia de la secuencia de Fibonacci.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Esta recurrencia fácilmente se puede poner en la forma

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$$

después de hacer la reescritua obvia.

$$f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$$

Por lo tanto, la secuencia de Fibonacci corresponde a una recurrencia lineal homogénea con coeficientes constantes, donde $k = 2, a_0 = 1$ y $a_1 = a_2 = -1$.

# Recurrencias homogéneas IV

- Incluso antes de comenzar a buscar soluciones a la Ecuación (1), es interesante notar que cualquier combinación lineal de soluciones es en sí misma una solución.

# Recurrencias homogéneas IV

- En otras palabras, si $f_n$ y $g_n$ satisfacen la Ecuación (1), entonces $\sum_{i=0}^{k} a_i f_{n-i} = 0$ y similarmente para $g_n$, si definimos $t_n = cf_n + dg_n$ para las constantes arbitrarias $c$ y $d$, entonces $t_n$ también es una solución de la Ecuación (1).

Esto es cierto porque

# Recurrencias homogéneas V

Esto es cierto porque

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} =$$

# Recurrencias homogéneas V

Esto es cierto porque

$$a_0t_n + a_1t_{n-1} + \cdots + a_kt_{n-k} =$$
$$a_0(cf_n + dg_n) + a_1(cf_{n-1} + dg_{n-1}) + \cdots + a_k(cf_{n-k} + dg_{n-k}) =$$

# Recurrencias homogéneas V

Esto es cierto porque

$$
\begin{aligned}
&a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = \\
&a_0(cf_n + dg_n) + a_1(cf_{n-1} + dg_{n-1}) + \cdots + a_k(cf_{n-k} + dg_{n-k}) = \\
&c(a_0 f_n + a_1 f_{n-1} + \cdots + a_k f_{n-k}) + d(a_0 g_n + a_1 g_{n-1} + \cdots + a_k g_{n-k}) =
\end{aligned}
$$

# Recurrencias homogéneas V

Esto es cierto porque

$$
\begin{aligned}
&a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = \\
&a_0(cf_n + dg_n) + a_1(cf_{n-1} + dg_{n-1}) + \cdots + a_k(cf_{n-k} + dg_{n-k}) = \\
&c(a_0 f_n + a_1 f_{n-1} + \cdots + a_k f_{n-k}) + d(a_0 g_n + a_1 g_{n-1} + \cdots + a_k g_{n-k}) = \\
&c \times 0 + d \times 0 = 0.
\end{aligned}
$$

# Recurrencias homogéneas V

Esto es cierto porque

$$
\begin{aligned}
&a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = \\
&a_0(cf_n + dg_n) + a_1(cf_{n-1} + dg_{n-1}) + \cdots + a_k(cf_{n-k} + dg_{n-k}) = \\
&c(a_0 f_n + a_1 f_{n-1} + \cdots + a_k f_{n-k}) + d(a_0 g_n + a_1 g_{n-1} + \cdots + a_k g_{n-k}) = \\
&c \times 0 + d \times 0 = 0.
\end{aligned}
$$

Esta regla se generaliza a combinaciones lineales de cualquier número de soluciones.

# Recurrencias homogéneas VI

Buscamos soluciones de la forma

$$t_n = x^n$$

donde $x$ es una constante aún desconocida.

Buscamos soluciones de la forma

$$t_n = x^n$$

donde $x$ es una constante aún desconocida. Si sustituimos esta solución en la Ecuación (1), obtenemos

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_k x^{n-k} = 0$$

# Recurrencias homogéneas VI

Buscamos soluciones de la forma

$$t_n = x^n$$

donde $x$ es una constante aún desconocida. Si sustituimos esta solución en la Ecuación (1), obtenemos

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_k x^{n-k} = 0$$

Esta ecuación se satisface si $x = 0$, una solución trivial que no es de interés. De otra manera la ecuación se satisface si y sólo si

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k = 0$$

# Recurrencias homogéneas VII

Esta ecuación de grado $k$ en $x$ se llama la **ecuación característica** de la recurrencia (1) y

$$p(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$$

se llama su **polinomio característico**.

Recuerde que el teorema fundamental del álgebra establece que cualquier polinomio $p(x)$ de grado $k$ tiene exactamente $k$ raíces (no necesariamente distintas), lo que significa que puede factorizarse como un producto de $k$ monomios.

# Recurrencias homogéneas VIII

Recuerde que el teorema fundamental del álgebra establece que cualquier polinomio $p(x)$ de grado $k$ tiene exactamente $k$ raíces (no necesariamente distintas), lo que significa que puede factorizarse como un producto de $k$ monomios.

$$p(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - r_i),$$

Recuerde que el teorema fundamental del álgebra establece que cualquier polinomio $p(x)$ de grado $k$ tiene exactamente $k$ raíces (no necesariamente distintas), lo que significa que puede factorizarse como un producto de $k$ monomios.

$$p(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - r_i),$$

donde las $r_i$ pueden ser números complejos. Aún más, estas $r_i$ son las únicas soluciones de la ecuación $p(x) = 0$.

# Recurrencias homogéneas IX

- Considere cualquier raíz $r_i$ del polinomio característico.

# Recurrencias homogéneas IX

- Como $p(r_i) = 0$ se deduce que $x = r_i$ es una solución a la ecuación característica y, por lo tanto, $r_i^n$ es una solución de la recurrencia.

- Dado que cualquier combinación lineal de soluciones también es una solución, concluimos que

$$t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i r_i^n \tag{2}$$

satisface la recurrencia para cualquier elección de constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

# Recurrencias homogéneas X

- El hecho notable, que no probamos aquí, es que la Ecuación (1) sólo tiene soluciones de esta forma siempre que todas las $r_i$ sean distintas.

# Recurrencias homogéneas X

- En este caso, las $k$ constantes se pueden determinar a partir de $k$ condiciones iniciales resolviendo un sistema de $k$ ecuaciones lineales con $k$ incógnitas.

# Ejemplo 1 I

## Ejemplo 1 (Fibonacci)

Considere la recurrencia

$$f_n = \begin{cases} n & \text{si } n = 0 \text{ o } n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

## Ejemplo 1 (Fibonacci)

Considere la recurrencia

$$f_n = \begin{cases} n & \text{si } n = 0 \text{ o } n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1. Primero reescribimos esta recurrencia en la forma de la Ecuación 1.

$$f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$$

# Ejemplo 1 I

## Ejemplo 1 (Fibonacci)

Considere la recurrencia

$$f_n = \begin{cases} n & \text{si } n = 0 \text{ o } n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1. Primero reescribimos esta recurrencia en la forma de la Ecuación 1.

$$f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$$

2. Por lo tanto su polinimio característico es

$$x^2 - x - 1$$

# Ejemplo 1 I

## Ejemplo 1 (Fibonacci)

Considere la recurrencia

$$f_n = \begin{cases} n & \text{si } n = 0 \text{ o } n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1. Primero reescribimos esta recurrencia en la forma de la Ecuación 1.

$$f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$$

2. Por lo tanto su polinimio característico es

$$x^2 - x - 1$$

3. cuyas raíces son

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ y } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

# Ejemplo 1 II

4. Por lo tanto la solución general es de la forma

$$f_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n. \tag{3}$$

# Ejemplo 1 II

4. Por lo tanto la solución general es de la forma

$$f_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n. \tag{3}$$

5. Falta usar las condiciones iniciales para determinar las constantes $c_1$ y $c_2$.

# Ejemplo 1 II

4. Por lo tanto la solución general es de la forma

$$f_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n. \tag{3}$$

5. Falta usar las condiciones iniciales para determinar las constantes $c_1$ y $c_2$.
6. Cuando $n = 0$, la Ecuación (3) nos da $f_0 = c_1 + c_2$. Pero sabemos que $f_0 = 0$. Por lo tanto, $c_1 + c_2 = 0$.

# Ejemplo 1 II

4. Por lo tanto la solución general es de la forma

$$f_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n. \tag{3}$$

5. Falta usar las condiciones iniciales para determinar las constantes $c_1$ y $c_2$.
6. Cuando $n = 0$, la Ecuación (3) nos da $f_0 = c_1 + c_2$. Pero sabemos que $f_0 = 0$. Por lo tanto, $c_1 + c_2 = 0$.
7. Similarmente cuando $n = 1$, la Ecuación (3) junto con la segunda condición inicial nos dice que $f_1 = c_1 r_1 + c_2 r_2 = 1$.

# Ejemplo 1 II

4. Por lo tanto la solución general es de la forma
$$f_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n. \tag{3}$$
5. Falta usar las condiciones iniciales para determinar las constantes $c_1$ y $c_2$.
6. Cuando $n = 0$, la Ecuación (3) nos da $f_0 = c_1 + c_2$. Pero sabemos que $f_0 = 0$. Por lo tanto, $c_1 + c_2 = 0$.
7. Similarmente cuando $n = 1$, la Ecuación (3) junto con la segunda condición inicial nos dice que $f_1 = c_1 r_1 + c_2 r_2 = 1$.
8. Recordando que los valores de $r_1$ y $r_2$ son conocidos, esto nos da dos ecuaciones lineales con las incognitas $c_1$ y $c_2$.

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \quad n = 0 \\ r_1 c_1 + r_2 c_2 &= 1 \quad n = 1 \end{aligned}$$

# Ejemplo 1 III

9. Resolviendo estas ecuaciones obtenemos

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ y } c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

# Ejemplo 1 III

9. Resolviendo estas ecuaciones obtenemos
$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ y } c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$
10. Así
$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

# Ejemplo 1 III

9. Resolviendo estas ecuaciones obtenemos
$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ y } c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$
10. Así
$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Note que hemos obtenido la famosa fórmula de de Moivre para la secuencia de Fibonacci.

# Ejemplo 2 I

## Ejemplo 2

Considere la recurrencia

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 5 & \text{si } n = 1 \\ 3t_{n-1} + 4t_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

# Ejemplo 2 I

## Ejemplo 2

Considere la recurrencia

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 5 & \text{si } n = 1 \\ 3t_{n-1} + 4t_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1. Primero reescribimos la recurrencia

$$t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0.$$

# Ejemplo 2 I

## Ejemplo 2

Considere la recurrencia

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 5 & \text{si } n = 1 \\ 3t_{n-1} + 4t_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1. Primero reescribimos la recurrencia

$$t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0.$$

2. Su polinomio característico es

$$x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4).$$

# Ejemplo 2 I

## Ejemplo 2

Considere la recurrencia

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 5 & \text{si } n = 1 \\ 3t_{n-1} + 4t_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1. Primero reescribimos la recurrencia

$$t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0.$$

2. Su polinomio característico es

$$x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4).$$

3. Cuyas raíces son $r_1 = -1$ y $r_2 = 4$.

# Ejemplo 2 II

4. La solución por tanto es de la forma

$$t_n = c_1(-1)^n + c_2 4^n.$$

# Ejemplo 2 II

4. La solución por tanto es de la forma

$$t_n = c_1(-1)^n + c_2 4^n.$$

5. Las condiciones iniciales dan

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \qquad & n &= 0 \\ -c_1 + 4c_2 &= 5 \qquad & n &= 1 \end{aligned}$$

# Ejemplo 2 II

4. La solución por tanto es de la forma

$$t_n = c_1(-1)^n + c_2 4^n.$$

5. Las condiciones iniciales dan

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \qquad & n = 0 \\ -c_1 + 4c_2 &= 5 \qquad & n = 1 \end{aligned}$$

6. Resolviendo estas ecuaciones obtenemos que $c_1 = -1$ y $c_2 = 1$. Por lo tanto

$$t_n = 4^n - (-1)^n.$$

# Raíces múltiples I

- La situación se vuelve un poco más complicada cuando el polinomio característico tiene múltiples raíces, es decir, cuando las $k$ raíces no son todas distintas.

# Raíces múltiples I

- Sigue siendo cierto que la Ecuación (2) satisface la recurrencia de cualquier valor de las constantes $c_i$, pero ésta ya no es la solución más general.

# Raíces múltiples I

- Para encontrar otras soluciones, sea

$$p(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k$$

el polinomio característico de nuestra recurrencia, y sea $r$ una raíz múltiple.

# Raíces múltiples I

- Para encontrar otras soluciones, sea

$$p(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$$

  el polinomio característico de nuestra recurrencia, y sea $r$ una raíz múltiple.
- Por definición de raíces múltiples, existe un polinomio $q(x)$ de grado $k-2$ tal que $p(x) = (x-r)^2 q(x)$.

# Raíces múltiples II

Para cada $n \geq k$ considere los polinomios de $n$-ésimo grado

$$u_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_k x^{n-k} \text{ y}$$
$$v_n(x) = a_0 n x^n + a_1 (n-1) x^{n-1} + \cdots + a_k (n-k) x^{n-k}.$$

# Raíces múltiples II

Para cada $n \geq k$ considere los polinomios de $n$-ésimo grado

$$\begin{aligned} u_n(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_k x^{n-k} \text{ y} \\ v_n(x) &= a_0 n x^n + a_1 (n-1) x^{n-1} + \cdots + a_k (n-k) x^{n-k}. \end{aligned}$$

Observe que $v_n(x) = x \times u_n'(x)$, donde $u_n'(x)$ denota la derivada de $u_n(x)$ con respecto de $x$.

# Raíces múltiples III

- Pero $u_n(x)$ se puede reescribir como

$$u_n(x) = x^{n-k}p(x) = x^{n-k}(x-r)^2q(x) = (x-r)^2 \times [x^{n-k}q(x)].$$

# Raíces múltiples III

- Pero $u_n(x)$ se puede reescribir como

$$u_n(x) = x^{n-k}p(x) = x^{n-k}(x-r)^2q(x) = (x-r)^2 \times [x^{n-k}q(x)].$$

- Usando la regla para calcular la derivada de un producto de funciones, obtenemos que la derivada de $u_n(x)$ con respecto de $x$ es

$$u_n'(x) = 2(x-r)x^{n-k}q(x) + (x-r)^2[x^{n-k}q(x)]'.$$

# Raíces múltiples III

- Pero $u_n(x)$ se puede reescribir como

$$u_n(x) = x^{n-k}p(x) = x^{n-k}(x-r)^2q(x) = (x-r)^2 \times [x^{n-k}q(x)].$$

- Usando la regla para calcular la derivada de un producto de funciones, obtenemos que la derivada de $u_n(x)$ con respecto de $x$ es

$$u_n'(x) = 2(x-r)x^{n-k}q(x) + (x-r)^2[x^{n-k}q(x)]'.$$

- Por lo tanto $u_n'(r) = 0$, lo cual implica que $v_n(r) = r \times u_n'(r) = 0$ para todo $n \geq k$.

# Raíces múltiples III

- Pero $u_n(x)$ se puede reescribir como

$$u_n(x) = x^{n-k}p(x) = x^{n-k}(x-r)^2 q(x) = (x-r)^2 \times [x^{n-k}q(x)].$$

- Usando la regla para calcular la derivada de un producto de funciones, obtenemos que la derivada de $u_n(x)$ con respecto de $x$ es

$$u_n'(x) = 2(x-r)x^{n-k}q(x) + (x-r)^2[x^{n-k}q(x)]'.$$

- Por lo tanto $u_n'(r) = 0$, lo cual implica que $v_n(r) = r \times u_n'(r) = 0$ para todo $n \geq k$.
- En otras palabras,

$$a_0 n r^n + a_1(n-1)r^{n-1} + \cdots + a_k(n-k)r^{n-k} = 0.$$

# Raíces múltiples III

- Pero $u_n(x)$ se puede reescribir como

$$u_n(x) = x^{n-k}p(x) = x^{n-k}(x-r)^2q(x) = (x-r)^2 \times [x^{n-k}q(x)].$$

- Usando la regla para calcular la derivada de un producto de funciones, obtenemos que la derivada de $u_n(x)$ con respecto de $x$ es

$$u_n'(x) = 2(x-r)x^{n-k}q(x) + (x-r)^2[x^{n-k}q(x)]'.$$

- Por lo tanto $u_n'(r) = 0$, lo cual implica que $v_n(r) = r \times u_n'(r) = 0$ para todo $n \geq k$.
- En otras palabras,

$$a_0nr^n + a_1(n-1)r^{n-1} + \cdots + a_k(n-k)r^{n-k} = 0.$$

Recuerde que $v_n(x) = a_0nx^n + a_1(n-1)x^{n-1} + \cdots + a_k(n-k)x^{n-k}$.

# Raíces múltiples IV

- Concluimos que $t_n = nr^n$ también es una solución a la recurrencia.

# Raíces múltiples IV

- Ésta es una solución genuinamente nueva en el sentido de que no puede obtenerse eligiendo las constantes apropiadas $c_i$ en la Ecuación (2).

# Raíces múltiples IV

- De manera más general, si la raíz $r$ tiene multiplicidad $m$, entonces $t_n = r^n, t_n = nr^n, t_n = n^2r^n, \ldots, t_n = n^{m-1}r^n$ son todas las soluciones distintas de la recurrencia.

# Raíces múltiples IV

- De manera más general, si la raíz $r$ tiene multiplicidad $m$, entonces $t_n = r^n, t_n = nr^n, t_n = n^2r^n, \ldots, t_n = n^{m-1}r^n$ son todas las soluciones distintas de la recurrencia.
- La solución general es una combinación lineal de estos términos y de los términos aportados por las otras raíces del polinomio característico.

## Raíces múltiples V

- En resumen, si $r_1, r_2, \ldots, r_l$ son las $l$ raíces distintas del polinomio característico y si sus multiplicidades son $m_1, m_2, \ldots, m_l$, respectivamente, entonces

$$t_n = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{ij} n^j r_i^n$$

es la solución general de la Ecuación (1).

# Raíces múltiples V

- Nuevamente, las constantes $c_{ij}, 1 \leq i \leq l$ y $0 \leq j \leq m_i - 1$, deben ser determinadas por las $k$ condiciones iniciales.

# Raíces múltiples V

- Existen esas $k$ constantes porque $\sum_{i=1}^{l} m_i = k$ (la suma de las multiplicidades de las distintas raíces es igual al número total de raíces).

# Raíces múltiples V

- Por simplicidad, normalmente etiquetaremos las constantes mediante $c_1, c_2, \ldots, c_k$ en lugar de utilizar dos índices.

# Ejemplo 3 I

## Ejemplo 3

Considere la recurrencia

$$t_n = \begin{cases} n & \text{si } n = 0, 1 \text{ o } 2 \\ 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

## Ejemplo 3

Considere la recurrencia

$$t_n = \begin{cases} n & \text{si } n = 0, 1 \text{ o } 2 \\ 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Primero reescribimos la recurrencia.

$$t_n - 5t_{n-1} + 8t_{n-2} - 4t_{n-3} = 0.$$

## Ejemplo 3

Considere la recurrencia

$$t_n = \begin{cases} n & \text{si } n = 0, 1 \text{ o } 2 \\ 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Primero reescribimos la recurrencia.

$$t_n - 5t_{n-1} + 8t_{n-2} - 4t_{n-3} = 0.$$

Su polinomio característico es

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2.$$

Por lo tanto las raíces son $r_1 = 1$ de multiplicidad $m_1 = 1$ y $r_2 = 2$ de multiplicidad $m_2 = 2$ y la solución general es

$$t_n = c_1 1^n + c_2 2^n + c_3 n 2^n.$$

Las condiciones iniciales dan

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \quad n = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 2c_3 &= 1 \quad n = 1 \\ c_1 + 4c_2 + 8c_3 &= 2 \quad n = 2 \end{aligned}$$

Solucionando estas ecuaciones obtenemos $c_1 = -2, c_2 = 2$ y $c_3 = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto la solución de la recurrencia es

$$t_n = 2^{n+1} - n2^{n-1} - 2.$$

# Ejercicios I

Resuelva las siguientes recurrencias:

1. $$t_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n = 1 \\ 5t_{n-1} - 6t_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. $$t_n = \begin{cases} 6 & \text{si } n = 0 \\ 8 & \text{si } n = 1 \\ 4t_{n-1} - 4t_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3. $$t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ -4t_{n-1} - 4t_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

# Ejercicios II

4.
$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 4 & \text{si } n = 1 \\ 4t_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

5.
$$t_n = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 0 \\ 6 & \text{si } n = 1 \\ t_{n-1} + 6t_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

6.
$$t_n = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 0 \\ -3 & \text{si } n = 1 \\ -6t_{n-1} - 9t_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

# Ejercicios III

7. $$t_n = \begin{cases} 9n^2 - 15n + 106 & \text{si } n = 0, 1 \text{ o } 2 \\ t_{n-1} + 2t_{n-2} - 2t_{n-3} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

8. $$t_n = \begin{cases} n & \text{si } n = 0, 1 \text{ o } 2 \\ t_{n-1} + t_{n-3} - t_{n-4} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

# Asesorías

$$t_n = at_{n-1}$$

$$t_n - at_{n-1} = 0$$

$$x - a = 0$$

$$x = a$$

$$t_n = c_1 a^n$$

$$c_1 a^0 = t_0 \quad n = 0$$

$$c_1 = t_0$$

$$t_n = t_0 a^n$$