Análisis de Algoritmos IV

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Maestría en Ciencias de la Computación
Análisis y Diseño de Algoritmos
MCOM 20300

Otoño 2020

Contenido

1 Motivación

2 Cambio de variable

3 Ejercicios

Motivación

- A veces es posible resolver recurrencias más complicadas haciendo un cambio de variable.

Motivación

- En los siguientes ejemplos, escribimos $T(n)$ para el término de una recurrencia general y t_i para el término de una nueva recurrencia obtenida de la primera por un cambio de variable.

Motivación

- Asegúrese de estudiar el ejemplo 4 que se encuentra entre las recurrencias más importantes para propósitos algorítmicos.

Cambio de variable I

Ejemplo 1

Considere la siguiente recurrencia donde n es una potencia de 2.

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 3T(n/2) + n & \text{si } n \text{ es una potencia de } 2 \end{cases}$$

Cambio de variable II

- Para transformar esto en una forma que sepamos resolver, reemplazamos n por 2^i.

Cambio de variable II

- Para transformar esto en una forma que sepamos resolver, reemplazamos n por 2^i.
- Esto se logra introduciendo una nueva recurrencia t_i, definida por $t_i = T(2^i)$.

Cambio de variable II

- Para transformar esto en una forma que sepamos resolver, reemplazamos n por 2^i.
- Esto se logra introduciendo una nueva recurrencia t_i, definida por $t_i = T(2^i)$.
- Esta transformación es útil porque $n/2$ se convierte en $2^i/2 = 2^{i-1}$.

Cambio de variable II

- Para transformar esto en una forma que sepamos resolver, reemplazamos n por 2^i.
- Esto se logra introduciendo una nueva recurrencia t_i, definida por $t_i = T(2^i)$.
- Esta transformación es útil porque $n/2$ se convierte en $2^i/2 = 2^{i-1}$.
- En otras palabras, nuestra recurrencia original en la que $T(n)$ se define como una función de $T(n/2)$ da paso a una en la que t_i se define como una función de t_{i-1}, precisamente el tipo de recurrencias que hemos aprendido a resolver.

Cambio de variable III

$$
\begin{aligned}
t_i = T(2^i) &= 3T(2^{i-1}) + 2^i \\
&= 3t_{i-1} + 2^i.
\end{aligned}
$$

Cambio de variable III

$$\begin{aligned} t_i = T(2^i) &= 3T(2^{i-1}) + 2^i \\ &= 3t_{i-1} + 2^i. \end{aligned}$$

Una vez que se reescribe como

$$t_i - 3t_{i-1} = 2^i$$

esta recurrencia es de la forma de la ecuación de una recurrencia no homogenea.

Cambio de variable III

$$
\begin{aligned}
t_i = T(2^i) &= 3T(2^{i-1}) + 2^i \\
&= 3t_{i-1} + 2^i.
\end{aligned}
$$

Una vez que se reescribe como

$$t_i - 3t_{i-1} = 2^i$$

esta recurrencia es de la forma de la ecuación de una recurrencia no homogenea.
Su polinomio caracrerístico es

$$(x-3)(x-2)$$

Cambio de variable III

$$
\begin{aligned}
t_i = T(2^i) &= 3T(2^{i-1}) + 2^i \\
&= 3t_{i-1} + 2^i.
\end{aligned}
$$

Una vez que se reescribe como

$$t_i - 3t_{i-1} = 2^i$$

esta recurrencia es de la forma de la ecuación de una recurrencia no homogenea.
Su polinomio caracrerístico es

$$(x-3)(x-2)$$

y así todas las soluciones para t_i son de la forma

$$t_i = c_1 3^i + c_2 2^i.$$

Cambio de variable IV

Usamos el hecho de que $T(2^i) = t_i$ y así que $T(n) = t_{\lg n}$ cuando $n = 2^i$ para obtener

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 3^{\lg n} + c_2 2^{\lg n} \\ &= c_1 n^{\lg 3} + c_2 n \end{aligned} \tag{1}$$

cuando n es una potencia de 2.

Cambio de variable IV

Usamos el hecho de que $T(2^i) = t_i$ y así que $T(n) = t_{\lg n}$ cuando $n = 2^i$ para obtener

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 3^{\lg n} + c_2 2^{\lg n} \\ &= c_1 n^{\lg 3} + c_2 n \end{aligned} \tag{1}$$

cuando n es una potencia de 2.
Lo cual es suficiente para concluir que

$$T(n) \in O(n^{\lg 3} | n \text{ es potencia de 2}).$$

Cambio de variable IV

Usamos el hecho de que $T(2^i) = t_i$ y así que $T(n) = t_{\lg n}$ cuando $n = 2^i$ para obtener

$$
\begin{aligned}
T(n) &= c_1 3^{\lg n} + c_2 2^{\lg n} \\
&= c_1 n^{\lg 3} + c_2 n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

cuando n es una potencia de 2.
Lo cual es suficiente para concluir que

$$T(n) \in O(n^{\lg 3} | n \text{ es potencia de 2}).$$

Sin embargo, debemos demostrar que c_1 es estrictamente positivo antes de poder afirmar algo sobre el orden exacto de $T(n)$.

Cambio de variable V

- Ahora estamos familiarizados con dos técnicas para determinar las constantes.

Cambio de variable V

- Ahora estamos familiarizados con dos técnicas para determinar las constantes.
- En aras de la didáctica, apliquemos cada una de ellas a esta situación.

Cambio de variable V

- Ahora estamos familiarizados con dos técnicas para determinar las constantes.
- En aras de la didáctica, apliquemos cada una de ellas a esta situación.
- El enfoque más directo, que no siempre proporciona la información deseada, es sustituir la solución proporcionada por la Ecuación (1) en la recurrencia original.

- Ahora estamos familiarizados con dos técnicas para determinar las constantes.
- En aras de la didáctica, apliquemos cada una de ellas a esta situación.
- El enfoque más directo, que no siempre proporciona la información deseada, es sustituir la solución proporcionada por la Ecuación (1) en la recurrencia original.
- Teniendo en cuenta que $(1/2)^{lg3} = 1/3$, esto produce

$$\begin{aligned} n &= T(n) - 3T(n/2) \\ &= (c_1 n^{\lg 3} + c_2 n) - 3(c_1 (n/2)^{\lg 3} + c_2 (n/2)) \\ &= -c_2 (n/2) \end{aligned}$$

y por lo tanto $c_2 = -2$.

Cambio de variable VI

- Aunque no obtuvimos el valor de c_1, que es la constante más relevante, estamos en condiciones de afirmar que debe ser estrictamente positiva, porque de lo contrario la Ecuación (1) implicaría falsamente que $T(n)$ es negativa.

Cambio de variable VI

- El hecho de que

$$T(n) \in \Theta(n^{\lg 3} | n \text{ es potencia de } 2) \tag{2}$$

queda así establecido.

Cambio de variable VI

- Por supuesto, el valor de c_1 ahora sería fácil de obtener de la Ecuación (1), el hecho de que $c_2 = -2$ y la condición inicial $T(1) = 1$, pero esto no es necesario si estamos satisfechos con resolver la recurrencia en notación asintótica.

Cambio de variable VI

- Además, hemos aprendido que la Ecuación (2) se cumple independientemente de la condición inicial, siempre que $T(n)$ sea positivo.

Cambio de variable VII

- El enfoque alternativo consiste en establecer dos ecuaciones lineales en las dos incógnitas c_1 y c_2 garantizando que producirá el valor de ambas constantes.

Cambio de variable VII

- Para esto, necesitamos el valor de $T(n)$ en dos puntos, ya sabemos que $T(1) = 1$, para obtener otro punto, usamos la recurrencia en sí: $T(2) = 3T(1) + 2 = 5$.

Cambio de variable VII

- Sustituyendo $n = 1$ y $n = 2$ en la Ecuación 1 se obtiene el siguiente sistema.

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \quad n = 1 \\ 3c_1 + 2c_2 &= 5 \quad n = 2 \end{aligned}$$

Cambio de variable VII

- Resolviendo estas ecuaciones obtenemos $c_1 = 3$ y $c_2 = -2$.

Cambio de variable VII

- Por lo tanto

$$T(n) = 3n^{\lg 3} - 2n$$

cuando n es una potencia de 2.

Cambio de variable VIII

Ejemplo 2

Considere la recurrencia

$$T(n) = 4T(n/2) + n^2$$

cuando n es una potencia de 2, $n \geq 2$.

Cambio de variable VIII

Ejemplo 2

Considere la recurrencia

$$T(n) = 4T(n/2) + n^2$$

cuando n es una potencia de 2, $n \geq 2$.

Procedemos como en el ejemplo previo.

$$\begin{aligned} t_i = T(2^i) &= 4T(2^{i-1}) + (2^i)^2 \\ &= 4t_{i-1} + 4^i. \end{aligned}$$

Cambio de variable VIII

Ejemplo 2

Considere la recurrencia

$$T(n) = 4T(n/2) + n^2$$

cuando n es una potencia de 2, $n \geq 2$.

Procedemos como en el ejemplo previo.

$$\begin{aligned} t_i = T(2^i) &= 4T(2^{i-1}) + (2^i)^2 \\ &= 4t_{i-1} + 4^i. \end{aligned}$$

Reescribimos la recurrencia en la forma de la ecuación de una recurrencia no homogenea.

$$t_i - 4t_{i-1} = 4^i.$$

Cambio de variable IX

Su polinomio característico es $(x-4)^2$ y así todas las soluciones son de la forma

$$t_i = c_1 4^i + c_2 i 4^i.$$

Cambio de variable IX

Su polinomio característico es $(x-4)^2$ y así todas las soluciones son de la forma

$$t_i = c_1 4^i + c_2 i 4^i.$$

En términos de $T(n)$, esto es

$$T(n) = c_1 n^2 + c_2 n^2 \lg n. \tag{3}$$

Cambio de variable IX

Su polinomio característico es $(x-4)^2$ y así todas las soluciones son de la forma

$$t_i = c_1 4^i + c_2 i 4^i.$$

En términos de $T(n)$, esto es

$$T(n) = c_1 n^2 + c_2 n^2 \lg n. \tag{3}$$

Sustituyendo la Ecuación (3) en la recurrencia original da

$$n^2 = T(n) - 4T(n/2) = c_2 n^2$$

y así $c_2 = 1$.

Cambio de variable IX

Su polinomio característico es $(x-4)^2$ y así todas las soluciones son de la forma

$$t_i = c_1 4^i + c_2 i 4^i.$$

En términos de $T(n)$, esto es

$$T(n) = c_1 n^2 + c_2 n^2 \lg n. \tag{3}$$

Sustituyendo la Ecuación (3) en la recurrencia original da

$$n^2 = T(n) - 4T(n/2) = c_2 n^2$$

y así $c_2 = 1$.
Por lo tanto

$$T(n) \in \Theta(n^2 \lg n | n \text{ es potencia de 2}),$$

sin importar la condición inicial (aún si $T(1)$ es negativo).

Cambio de variable IX

Ejemplo 3

Considere la recurrencia

$$T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$$

cuando n es una potencia de 2, $n \geq 2$.

Ejemplo 3

Considere la recurrencia

$$T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$$

cuando n es una potencia de 2, $n \geq 2$.

Como antes obtenemos

$$\begin{aligned} t_i = T(2^i) &= 2T(2^{i-1}) + i2^i \\ &= 2t_{i-1} + i2^i. \end{aligned}$$

Cambio de variable IX

Ejemplo 3

Considere la recurrencia

$$T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$$

cuando n es una potencia de 2, $n \geq 2$.

Como antes obtenemos

$$\begin{aligned} t_i = T(2^i) &= 2T(2^{i-1}) + i2^i \\ &= 2t_{i-1} + i2^i. \end{aligned}$$

Escribimos esto en forma de la ecuación de una recurrencia no homogenea.

$$t_i - 2t_{i-1} = i2^i.$$

Cambio de variable X

Su polinomio característico es $(x-2)(x-2)^2 = (x-2)^3$ y así todas las soluciones son de la forma

$$t_i = c_1 2^i + c_2 i 2^i + c_3 i^2 2^i.$$

Su polinomio característico es $(x-2)(x-2)^2 = (x-2)^3$ y así todas las soluciones son de la forma

$$t_i = c_1 2^i + c_2 i 2^i + c_3 i^2 2^i.$$

En términos de $T(n)$, esto es

$$T(n) = c_1 n + c_2 n \lg n + c_3 n \lg^2 n. \tag{4}$$

Cambio de variable X

Su polinomio característico es $(x-2)(x-2)^2 = (x-2)^3$ y así todas las soluciones son de la forma

$$t_i = c_1 2^i + c_2 i 2^i + c_3 i^2 2^i.$$

En términos de $T(n)$, esto es

$$T(n) = c_1 n + c_2 n \lg n + c_3 n \lg^2 n. \tag{4}$$

Sustituyendo la Ecuación (4) en la recurrencia original tenemos

$$n \lg n = T(n) - 2T(n/2) = (c_2 - c_3)n + 2c_3 n \lg n,$$

lo cual implica que $c_2 = c_3$ y $2c_3 = 1$, así $c_2 = c_3 = \frac{1}{2}$.

Cambio de variable X

Su polinomio característico es $(x-2)(x-2)^2 = (x-2)^3$ y así todas las soluciones son de la forma

$$t_i = c_1 2^i + c_2 i 2^i + c_3 i^2 2^i.$$

En términos de $T(n)$, esto es

$$T(n) = c_1 n + c_2 n \lg n + c_3 n \lg^2 n. \tag{4}$$

Sustituyendo la Ecuación (4) en la recurrencia original tenemos

$$n \lg n = T(n) - 2T(n/2) = (c_2 - c_3)n + 2c_3 n \lg n,$$

lo cual implica que $c_2 = c_3$ y $2c_3 = 1$, así $c_2 = c_3 = \frac{1}{2}$.
Por lo tanto

$$T(n) \in \Theta(n \lg^2 n | n \text{ es potencia de 2}),$$

sin importar las condiciones iniciales.

Cambio de variable XI

- Ahora estamos listos para resolver una de las recurrencias más importantes para efectos algorítmicos.

Cambio de variable XI

- Esta recurrencia es particularmente útil para el análisis de algoritmos divide y vencerás.

Cambio de variable XI

- Las constantes $n_0 \geq 1, l \geq 1, b \geq 2$ y $k \geq 0$ son números enteros, mientras que c es un número real estrictamente positivo.

Cambio de variable XII

Ejemplo 4

Sea $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ una función eventualmente no decreciente tal que

$$T(n) = lT(n/b) + cn^k \quad n > n_0 \tag{5}$$

cuando n/n_0 es una potencia exacta de b, esto es cuando $n \in \{bn_0, b^2n_0, b^3n_0, \ldots\}$.

Ejemplo 4

Sea $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ una función eventualmente no decreciente tal que

$$T(n) = lT(n/b) + cn^k \quad n > n_0 \tag{5}$$

cuando n/n_0 es una potencia exacta de b, esto es cuando $n \in \{bn_0, b^2 n_0, b^3 n_0, \ldots\}$.

En esta ocasión, el cambio de variable apropiado es $n = b^i n_0$.

$$\begin{aligned} t_i = T(b^i n_0) &= lT(b^{i-1} n_0) + c(b^i n_0)^k \\ &= lt_{i-1} + cn_0^k b^{ik} \end{aligned}$$

- La escribimos en la forma de una ecuación de recurrencia no homogenea.

$$t_i - lt_{i-1} = (cn_0^k)(b^k)^i.$$

Cambio de variable XIII

- La escribimos en la forma de una ecuación de recurrencia no homogenea.

$$t_i - lt_{i-1} = (cn_0^k)(b^k)^i.$$

- El lado derecho tiene la forma requerida $a^i p(i)$ donde $p(i) = cn_0^k$ es un polinomio constante (de grado 0) y $a = b^k$.

Cambio de variable XIII

- La escribimos en la forma de una ecuación de recurrencia no homogenea.

$$t_i - lt_{i-1} = (cn_0^k)(b^k)^i.$$

- El lado derecho tiene la forma requerida $a^i p(i)$ donde $p(i) = cn_0^k$ es un polinomio constante (de grado 0) y $a = b^k$.
- Por tanto, el polinomio característico es $(x - l)(x - b^k)$ cuyas raíces son l y b^k.

Cambio de variable XIII

- La escribimos en la forma de una ecuación de recurrencia no homogenea.
$$t_i - lt_{i-1} = (cn_0^k)(b^k)^i.$$
- El lado derecho tiene la forma requerida $a^i p(i)$ donde $p(i) = cn_0^k$ es un polinomio constante (de grado 0) y $a = b^k$.
- Por tanto, el polinomio característico es $(x - l)(x - b^k)$ cuyas raíces son l y b^k.
- A partir de esto, es tentador (¡pero falso en general!) Concluir que todas las soluciones son de la forma
$$t_i = c_1 l^i + c_2 (b^k)^i. \tag{6}$$

Cambio de variable XIV

Para escribir esto en términos de $T(n)$, observe que $i = \log_b(n/n_0)$ cuando n tiene la forma adecuada y, por lo tanto, $d^i = (n/n_0)^{\log_b d}$ para valores positivos arbitrarios de d.

Para escribir esto en términos de $T(n)$, observe que $i = \log_b(n/n_0)$ cuando n tiene la forma adecuada y, por lo tanto, $d^i = (n/n_0)^{\log_b d}$ para valores positivos arbitrarios de d.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T(n) &= (c_1/n_0^{\log_b l})n^{\log_b l} + (c_2/n_0^k)n^k \\ &= c_3 n^{\log_b l} + c_4 n^k, \end{aligned} \tag{7}$$

para las nuevas constantes apropiadas c_3 y c_4.

Cambio de variable XV

Para conocer estas constantes, sustituimos la Ecuación 7 en la recurrencia original.

$$\begin{aligned} cn^k &= T(n) - lT(n/b) \\ &= c_3 n^{\log_b l} + c_4 n^k - l(c_3 (n/b)^{\log_b l} + c_4 (n/b)^k) \\ &= \left(1 - \frac{l}{b^k}\right) c_4 n^k. \end{aligned}$$

Cambio de variable XV

Para conocer estas constantes, sustituimos la Ecuación 7 en la recurrencia original.

$$
\begin{aligned}
cn^k &= T(n) - lT(n/b) \\
&= c_3 n^{\log_b l} + c_4 n^k - l(c_3 (n/b)^{\log_b l} + c_4 (n/b)^k) \\
&= \left(1 - \frac{l}{b^k}\right) c_4 n^k.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $c_4 = c/(1 - l/b^k)$.

Cambio de variable XV

Por lo tanto $c_4 = c/(1 - l/b^k)$.
Para expresar $T(n)$ en notación asintótica, necesitamos mantener sólo el término dominante en la Ecuación (7). Hay tres casos a considerar, dependiendo de si l es menor, mayor o igual que b^k.

Cambio de variable XVI

- Si $l < b^k$ entonces $c_4 > 0$ y $k > \log_b l$, por lo tanto el término $c_4 n^k$ domina la Ecuación (7).

[1] Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ es eventualmente no decreciente si existe un umbral entero n_0 tal que $f(n) \leq f(n+1)$ para todo $n \geq n_0$. Esto implica por inducción matemática que $f(n) \leq f(n+1)$ siempre que $m \geq n \geq n_0$. Sea $b \geq 2$ cualquier entero. La función f es **suave**$-b$ si además de ser eventualmente no decreciente, satisface la condición $f(bn) \in O(f(n))$. En otras palabras, existe una constante c (que depende de b) tal que $f(bn) \leq cf(n)$ para toda $n \geq n_0$ (no hay pérdida de generalidad si se usa el umbral n_0 para ambos propósitos). Una función es **suave** si es suave$-b$ para todo entero $b \geq 2$.

Cambio de variable XVI

- Si $l < b^k$ entonces $c_4 > 0$ y $k > \log_b l$, por lo tanto el término $c_4 n^k$ domina la Ecuación (7).
- Concluimos que $T(n) \in \Theta(n^k | (n/n_0)$ es una potencia de b).

[1]Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ es eventualmente no decreciente si existe un umbral entero n_0 tal que $f(n) \leq f(n+1)$ para todo $n \geq n_0$. Esto implica por inducción matemática que $f(n) \leq f(n+1)$ siempre que $m \geq n \geq n_0$. Sea $b \geq 2$ cualquier entero. La función f es **suave**$-b$ si además de ser eventualmente no decreciente, satisface la condición $f(bn) \in O(f(n))$. En otras palabras, existe una constante c (que depende de b) tal que $f(bn) \leq cf(n)$ para toda $n \geq n_0$ (no hay pérdida de generalidad si se usa el umbral n_0 para ambos propósitos). Una función es **suave** si es suave$-b$ para todo entero $b \geq 2$.

Cambio de variable XVI

- Si $l < b^k$ entonces $c_4 > 0$ y $k > \log_b l$, por lo tanto el término $c_4 n^k$ domina la Ecuación (7).
- Concluimos que $T(n) \in \Theta(n^k | (n/n_0)$ es una potencia de $b)$.
- Pero n^k es una función suave[1] y $T(n)$ por suposición es una función eventualmente no decreciente.

[1] Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ es eventualmente no decreciente si existe un umbral entero n_0 tal que $f(n) \leq f(n+1)$ para todo $n \geq n_0$. Esto implica por inducción matemática que $f(n) \leq f(n+1)$ siempre que $m \geq n \geq n_0$. Sea $b \geq 2$ cualquier entero. La función f es **suave**$-b$ si además de ser eventualmente no decreciente, satisface la condición $f(bn) \in O(f(n))$. En otras palabras, existe una constante c (que depende de b) tal que $f(bn) \leq cf(n)$ para toda $n \geq n_0$ (no hay pérdida de generalidad si se usa el umbral n_0 para ambos propósitos). Una función es **suave** si es suave$-b$ para todo entero $b \geq 2$.

- Si $l < b^k$ entonces $c_4 > 0$ y $k > \log_b l$, por lo tanto el término $c_4 n^k$ domina la Ecuación (7).
- Concluimos que $T(n) \in \Theta(n^k | (n/n_0)$ es una potencia de $b)$.
- Pero n^k es una función suave[1] y $T(n)$ por suposición es una función eventualmente no decreciente.
- Por lo tanto $T(n) \in \Theta(n^k)$.

[1] Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ es eventualmente no decreciente si existe un umbral entero n_0 tal que $f(n) \leq f(n+1)$ para todo $n \geq n_0$. Esto implica por inducción matemática que $f(n) \leq f(n+1)$ siempre que $m \geq n \geq n_0$. Sea $b \geq 2$ cualquier entero. La función f es **suave**$-b$ si además de ser eventualmente no decreciente, satisface la condición $f(bn) \in O(f(n))$. En otras palabras, existe una constante c (que depende de b) tal que $f(bn) \leq cf(n)$ para toda $n \geq n_0$ (no hay pérdida de generalidad si se usa el umbral n_0 para ambos propósitos). Una función es **suave** si es suave$-b$ para todo entero $b \geq 2$.

Cambio de variable XVII

- Si $l > b^k$ entonces $c_4 < 0$ y $\log_b l > k$.

Cambio de variable XVII

- Si $l > b^k$ entonces $c_4 < 0$ y $\log_b l > k$.
- El hecho de que c_4 sea negativa implica que c_3 es positiva, porque de otra manera la Ecuación (7) implicaría que $T(n)$ es negativa, contrario a la especificación de que $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$.

Cambio de variable XVII

- Si $l > b^k$ entonces $c_4 < 0$ y $\log_b l > k$.
- El hecho de que c_4 sea negativa implica que c_3 es positiva, porque de otra manera la Ecuación (7) implicaría que $T(n)$ es negativa, contrario a la especificación de que $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$.
- Así, el término $c_3 n^{\log_b l}$ domina la Ecuación (7).

Cambio de variable XVII

- Si $l > b^k$ entonces $c_4 < 0$ y $\log_b l > k$.
- El hecho de que c_4 sea negativa implica que c_3 es positiva, porque de otra manera la Ecuación (7) implicaría que $T(n)$ es negativa, contrario a la especificación de que $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$.
- Así, el término $c_3 n^{\log_b l}$ domina la Ecuación (7).
- Aún más, $n^{\log_b l}$ es una función suave y $T(n)$ eventualmente no es decreciente.

Cambio de variable XVII

- Si $l > b^k$ entonces $c_4 < 0$ y $\log_b l > k$.
- El hecho de que c_4 sea negativa implica que c_3 es positiva, porque de otra manera la Ecuación (7) implicaría que $T(n)$ es negativa, contrario a la especificación de que $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$.
- Así, el término $c_3 n^{\log_b l}$ domina la Ecuación (7).
- Aún más, $n^{\log_b l}$ es una función suave y $T(n)$ eventualmente no es decreciente.
- Por lo tanto $T(n) \in \Theta(n^{\log_b l})$.

Cambio de variable XVIII

- Si $l = b^k$ estamos en problemas ¡ya que la fórmula para c_4 involucra una división por cero!

Cambio de variable XVIII

- Si $l = b^k$ estamos en problemas ¡ya que la fórmula para c_4 involucra una división por cero!
- Lo que está mal es que en este caso el polinomio característico tiene una sola raíz de multiplicidad 2 en lugar de dos raíces distintas.

- Si $l = b^k$ estamos en problemas ¡ya que la fórmula para c_4 involucra una división por cero!
- Lo que está mal es que en este caso el polinomio característico tiene una sola raíz de multiplicidad 2 en lugar de dos raíces distintas.
- Por lo tanto la Ecuación (6) no proporciona la solución general a la recurrencia.

Cambio de variable XVIII

- Si $l = b^k$ estamos en problemas ¡ya que la fórmula para c_4 involucra una división por cero!
- Lo que está mal es que en este caso el polinomio característico tiene una sola raíz de multiplicidad 2 en lugar de dos raíces distintas.
- Por lo tanto la Ecuación (6) no proporciona la solución general a la recurrencia.
- Por lo que la solución general es este caso es

$$t_i = c_5(b^k)^i + c_6 i(b^k)^i.$$

- En términos de $T(n)$, esto es

$$T(n) = c_7 n^k + c_8 n^k \log_b(n/n_0), \tag{8}$$

para constantes apropiadas c_7 y c_8.

Cambio de variable XIX

- En términos de $T(n)$, esto es

$$T(n) = c_7 n^k + c_8 n^k \log_b(n/n_0), \tag{8}$$

  para constantes apropiadas c_7 y c_8.
- Sustituyendo en la recurrencia original, nuestra manipulación usual nos da un valor sorprendentemente simple de $c_8 = c$.

- En términos de $T(n)$, esto es

$$T(n) = c_7 n^k + c_8 n^k \log_b(n/n_0), \tag{8}$$

para constantes apropiadas c_7 y c_8.

- Sustituyendo en la recurrencia original, nuestra manipulación usual nos da un valor sorprendentemente simple de $c_8 = c$.
- Por lo tanto, $cn^k \log_b n$ es el término dominante en la Ecuación (8) ya que desde el inicio del ejemplo se asumió que c era estrictamente positiva.

Cambio de variable XIX

- En términos de $T(n)$, esto es

$$T(n) = c_7 n^k + c_8 n^k \log_b(n/n_0), \tag{8}$$

  para constantes apropiadas c_7 y c_8.
- Sustituyendo en la recurrencia original, nuestra manipulación usual nos da un valor sorprendentemente simple de $c_8 = c$.
- Por lo tanto, $cn^k \log_b n$ es el término dominante en la Ecuación (8) ya que desde el inicio del ejemplo se asumió que c era estrictamente positiva.
- Ya que $n^k \log n$ es suave y $T(n)$ eventualmente es no decreciente concluimos que $T(n) \in \Theta(n^k \log n)$.

Cambio de variable XX

Poniendo todo junto, si tenemos una recurrencia de la forma

$$T(n) = lT(n/b) + cn^k \quad n > n_0,$$

entonces

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{si } l < b^k \\ \Theta(n^k \log n) & \text{si } l = b^k \\ \Theta(n^{\log_b l}) & \text{si } l > b^k \end{cases} \tag{9}$$

Resuelva las siguientes recurrencias exactamente, primero mediante cambio de variable, luego verifique sus respuestas empleando el resultado del Ejemplo 4.

1. Cuando n es una potencia de 2.
    1. $$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2T(n/2) + 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
    2. $$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 4T(n/2) + n & \text{en otro caso} \end{cases}$$
    3. $$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2T(n/2) + \lg n & \text{en otro caso} \end{cases}$$

4. $$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 5T(n/2) + (n \lg n)^2 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. Cuando n es una potencia de 3.
   1. $$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 2T(n/3) + 4 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
   2. $$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ T(n/3) + 2 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3. Cuando n es de la forma 2^{2^k}.

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2 \\ 2T(\sqrt{n}) + \lg n & \text{en otro caso} \end{cases}$$

4. Investigue qué es el teorema maestro y haga un análisis de éste comparándolo con lo que hemos visto.