Definición

Sea $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. *Se define la relación de* **congruencia módulo** n *en* $\mathbb{Z}$ *como*

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n|(a-b)$$

Ejemplo

1. $5 \equiv 1 \pmod{4}$ pues $4|(5-1)$.
2. $21 \equiv 0 \pmod{7}$ pues $7|(21-0)$.
3. $28 \equiv 8 \pmod{5}$ pues $5|(28-8)$

Tarea

Demuestre que la relación de congruencia módulo n es de equivalencia.

Tarea

Determinar el número de relaciones de equivalencia distintas que puede haber en un conjunto de tres elementos enumerándolas todas.

Tarea

Sea R la relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Demostrar que R es de equivalencia.

Definición

Sea R una relación de equivalencia sobre A. Si $a \in A$, la **clase de equivalencia de** *a es*

$$\bar{a} = [a] = \{x \in A \,|\, xRa\}$$

El elemento a se llama **representante** *de la clase de equivalencia.*

Ejemplo

Sea R la relación de equivancia en $\mathbb{Z}$ dada por $aRb \Leftrightarrow a = b$ o $a = -b$. Entonces

$$[1] = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, xR1\}$$

pero $xR1 \Leftrightarrow x = 1$ o $x = -1$. Así

$$[1] = \{1, -1\}$$
$$[2] = \{2, -2\}$$
$$[0] = \{0\}$$

Ejemplo

Consideremos la relación en $\mathbb{Z}$ de congruencia módulo 4:

$$a \equiv b \pmod 4 \Leftrightarrow 4|(a-b)$$

entonces

$$[0] = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \equiv 0 \pmod 4\}$$

pero

$$\begin{aligned} x \equiv 0 \pmod 4 &\Leftrightarrow 4|(x-0) = x \\ &\Leftrightarrow x = 4k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

esto es

$$\begin{aligned} [0] =& \{x \in \mathbb{Z} \,|\, \text{existe } k \in \mathbb{Z} \text{ con } x = 4k\} \\ =& \{\ldots, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\} \end{aligned}$$

Similarmente

$$[1] = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \equiv 1 \pmod 4\}$$

pero

$$\begin{aligned} x \equiv 1 \pmod 4 \Leftrightarrow x - 1 = 4k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}; \\ x = 4k + 1 \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} [1] &= \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x = 4k + 1 \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots\} \end{aligned}$$

y de forma análoga

$$[2] = \{\ldots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \ldots\}$$

$$[3] = \{\ldots, -4, -1, 3, 7, 11, 15, 19, \ldots\}$$

$$[4] = \{\ldots, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\} = [0]$$

y $[-1] = [3]$, $[-2] = [2]$, etc.

Ejemplo

En $\mathbb{Q}$ se define la relación

$$xRy \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{3y+h}{3}.$$

1. Demostrar que R es de equivalencia.
2. Hallar la clase de $2/3$.

Sol.

1. 1.1 Reflexiva: notemos que

$$xRx \Leftrightarrow x = \frac{3x+h}{3} \Leftrightarrow h = 0$$

luego $\forall x \in \mathbb{Q}$, xRx pues existe $h = 0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \frac{3x+0}{3}$

1.2 Simétrica:

$$xRy \Rightarrow \exists h \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{3y+h}{3}$$

$$\Rightarrow 3x = 3y + h$$

$$\Rightarrow \frac{3x - h}{3} = y$$

$$\Rightarrow y = \frac{3x + (-h)}{3} \text{ con } -h \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow yRx$$

1.3 Transitiva: si xRy y yRz, por demostrar xRz. Tenemos

$$x = \frac{3y + h_1}{3} \text{ y } y = \frac{3z + h_2}{3}$$

sustituyendo el y dado por la segunda ecuación en la primera:

$$x = \frac{3\frac{3z+h_2}{3} + h_1}{3} = \frac{(3z + h_2) + h_1}{3}$$

entonces

$$x = \frac{3z + (h_1 + h_2)}{3}$$

con $h_1 + h_2 \in \mathbb{Z}$. Lo que implica

$$xRz$$

2. Por definición de clase

$$[2/3] = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, xR(2/3)\}$$

pero

$$xR(2/3) \Leftrightarrow x = \frac{3(2/3)+h}{3} = \frac{2+h}{3}$$

con $2+h \in Z$. Pero $h \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2+h \in \mathbb{Z}$; por lo que podemos renombrar $h' = h+2$ y escribir

$$\begin{aligned}[2/3] &= \{z \in \mathbb{Q} \,|\, z = h'/3 \text{ con } h' \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\ldots, -3/3, -2/3, -1/3, 0, 1/3, 2/3, 3/3, 4/3, \ldots\}\end{aligned}$$

Propiedad

Sea R una relación de equivalencia sobre A y $a, b \in A$ cualesquiera.

$$[a] = [b] \Leftrightarrow aRb$$

Dem.

($\Rightarrow$) Supongamos que $[a] = [b]$. Por la propiedad reflexiva $a \in [a] = [b]$ luego $a \in [b] = \{x \in A \mid xRa\}$ entoncesaRb.

($\Leftarrow$) Supongamos aRb. Por demostrar $[a] = [b]$, lo cual haremos por contenciones:

1. $[a] \subseteq [b]$: si $z \in [a]$ entonces zRa, pero como por hipótesis aRb entonces zRb por transitiva. Luego $z \in [b]$.
2. $[b] \subseteq [a]$: si $z \in [b]$ entonces zRb, pero bRa por simétrica, luego, por transitiva, zRa; lo que implica $z \in [a]$

$\square$