Teorema

Sean $R : A \to B$, $S : B \to C$, $T : C \to D$ *relaciones. Entonces*

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R.$$

Demostración.
Tenemos que

$$S \circ R : A \to C, \quad T \circ S : B \to D.$$

Demostraremos que

1. $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$
2. $(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$

1. Sea $(a, d) \in T \circ (S \circ R)$ entonces existe $c \in C$ tal que

$$a\, S \circ R\, c \text{ y } cTd$$

en particular $(a, c) \in S \circ R$, luego existe $b \in B$ tal que

$$aRb \text{ y } bSc.$$

Tenemos bSc y cTd, luego $(b, d) \in T \circ S$; pero también $(a, b) \in R$ y $(b, d) \in T \circ S$, lo que implica

$$a \in (T \circ S) \circ R$$

2. Tarea.

Tarea

1. Sea R la relación $\{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,1)\}$, y sea S la relación $\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,2)\}$. Encuentre
   1.1 $S \circ R$;
   1.2 $R \circ S$.
2. Sea R la relación sobre el conjunto de las personas definida por: $a\,R\,b$ ssi a es padre o madre de b. Sea S la reación, también sobre el conjunto de personas definida por: $a\,S\,b$ ssi a es hermana(o) de b. ¿Qué relaciones son $S \circ R$, $R \circ S$?
3. Las siguientes relaciones son sobre $\mathbb{R}$:

$$xR_1y \text{ ssi } x > y;$$

$$x\,R_2\,y \text{ ssi } x \geq y;$$

$$x\,R_3\,y \text{ ssi } x \neq y.$$

Encuentre

1. $R_1 \circ R_1$;
2. $R_1 \circ R_2$;
3. $R_1 \circ R_3$;
4. $R_3 \circ R_3$.

Tarea

1. *Sea A un conjunto. Se define Id_A la relación identidad sobre A como*

   $$a \, Id_A b \text{ ssi } a = b.$$

   Sea B un conjunto adicional y $R : A \to B$ una relación arbitraria. Demuestre que:

   1.1 $R \circ Id_A = R$;
   1.2 $Id_B \circ R = R$.

Relaciones de equivalencia. Particiones

Definición

Sea R una relación sobre A. Se dice que R es

1. **reflexiva** *si* $(\forall a \in A)(aRa)$
2. **simétrica** *si* $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(aRb \Rightarrow bRa)$
3. **antisimétrica** *si* $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b)$
4. **transitiva** *si* $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in C)(aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$

Ejemplo

Sea R la relación en $\mathbb{Z}$ definida por

$$xRy \Leftrightarrow xy > 0.$$

1. R no es reflexiva pues $0 \not R 0$ porque $0 * 0 \not> 0$.
2. R es simétrica pues

$$aRb \Rightarrow ab > 0 \Rightarrow ba > 0 \Rightarrow bRa$$

3. R no es antisimétrica pues $1R2$ y $2R1$ pero $2 \neq 1$.
4. R es transitiva pues

$$\begin{aligned} aRb \wedge bRc &\Rightarrow ab > 0 \text{ y } bc > 0 \\ &\Rightarrow \ a \text{ y } b \text{ tienen el mismo signo además } b \text{ y } c \text{ tienen el} \\ &\Rightarrow a \text{ y } c \text{ tienen el mismo signo} \\ &\Rightarrow ac > 0 \\ &\Rightarrow aRc \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea R la relación en $\mathbb{Z}$ definida por

$$xRy \Leftrightarrow xy \geq 0.$$

1. R es reflexiva: $\forall x \in \mathbb{Z}$ se cumple xRx pues $xx \geq 0$.
2. R es simétrica:

$$xRy \Rightarrow xy \geq 0 \Rightarrow yx \geq 0 \Rightarrow yRx$$

3. R no es antisimétrica: $4R3$ y $3R4$ pero $4 \neq 3$.
4. R no es transitiva: $(-1)R0$ pues $-1 * 0 \geq 0$ y $0R1$ pues $0 * 1 \geq 0$ pero $(-1)\not{R}1$.