Álgebras de Boole y bits

El álgebra de Boole proporciona leyes y operaciones sobre el conjunto de bits $\{0,1\}$. Las más básicas definiciones son:

1. Complemento (NOT): $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$.
2. Suma booleana (OR):

$$\begin{array}{ccc} 0 + 0 = 1 & \qquad & 0 + 1 = 1 \\ 1 + 0 = 1 & & 1 + 1 = 1 \end{array}$$

3. Producto booleano (AND):

$$\begin{array}{ccc} 0 \cdot 0 = 0 & \qquad & 0 \cdot 1 = 0 \\ 1 \cdot 0 = 0 & & 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

Ante ausencia de paréntesis, las regla de precedencia entre las operaciones son

1. complementos;
2. productos;
3. sumas.

Ejemplo

Evaluar:

$$1 \cdot 0 + \bar{1}$$

Sol.

$$\begin{aligned} 1 \cdot 0 + \bar{1} &= 1 \cdot 0 + 0 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

1. Sean $B = \{0, 1\}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $B^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, 1 \leq i \leq n, x_i \in B\}$
2. Si x es una variable tal que toma valores en B , entonces x se llama **variable booleana**.
3. Una función $F : B^n \to B$ se llama **función booleana de grado** n.

Ejemplo

Sea $F : B^2 \to B$, $F(x, y) = \bar{x}y$. Tal es función booleana de grado 2. Sus valores vienen dados por la tabla:

x	y	$F(x, y)$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Definición

Sean F, G funciones booleanas de grado n. Se definen:

1. $F = G \Leftrightarrow (\forall b_1, \ldots, b_n \in B)$, $F(b_1, \ldots, b_n) = G(b_1, \ldots, b_n)$
2. 2.1 $(F + G)(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n) + G(x_1, \ldots, x_n)$ *(suma booleana).*
   2.2 $(FG)(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, _n)G(x_1, \ldots, x_n)$ *(producto booelano)*
   2.3 $\bar{F}(x_1, \ldots, x_n) = \overline{F(x_1, \ldots, x_n)}$

Propiedad

Si x, y, z son variables booleanas,

$$x(y+z) = xy + xz.$$

Demostración.

Sean $F(x,y,z) = x(y+z)$ y $G(x,y,z) = xy + xz$.
Demostraremos que $F = G$, esto es, que $F(b_1, b_2, b_3) = G(b_1, b_2, b_3)\ \forall b_i,\ i = 1, 2, 3$. Para esto basta con calcular sus valores de verdad en una tabla:

x	y	z	$y+z$	xy	xz	$x(y+z)$	$xy+xz$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

y como las dos últimas columnas son iguales, se concluye que

$$x(y+z) = xy + xz.$$

La propiedad anterior se llama *distributiva del producto con respecto la suma*. También existe la *propiedad distributiva de la suma con respecto al producto*.

Propiedad

Si x, y, z son variables booleanas entonces

$$x + yz = (x + y)(x + z).$$

Demostración.

Calcularemos las tablas de verdad:

x	y	z	$x + yz$	$(x + y)(x + z)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

$$\therefore x + yz = (x + y)(x + z).$$

$\square$

Otra forma de demostrar igualdades es utilizando únicamente propiedades algebraicas.

Ejemplo

Demostrar la *propiedad de absorción*:

$$x(x+y) = x.$$

Demostración.

Tenemos que

$$\begin{aligned} x(x+y) &= (x+0)(x+y), && \text{neutro} \\ &= x + 0 \cdot y, && \text{Propiedad 2} \\ &= x + y \cdot 0, && \text{conmutativa} \\ &= x + 0 && \\ &= x && \text{neutro} \end{aligned}$$

□

Definición

El **dual** *de una expresión booleana se obtiene al intercambiar las sumas con productos y los 0's por 1's.*

Ejemplo

El dual de $x(y+0)$ es $x+y\cdot 1$; el dual de $\bar{x}\cdot 1+(\bar{y}+z)$ es $(x+0)\bar{y}z$.

El *principio de dualidad* en álgebras de Boole asegura que si dos expresiones son iguales entonces son iguales sus duales.

Ejemplo

Sabemos que

$$x(x+y)=x$$

entonces, por el principio de dualidad, obtenemos que

$$x+(xy)=x.$$

Tarea

1. *Calcular las tablas de verdad de las siguientes funciones booleanas*
   1.1 $F(x, y, z) = \bar{z}$.
   1.2 $F(x, y, z) = \bar{x}y + \bar{y}z$
   1.3 $F(x, y, z) = x\bar{y}z + \overline{xyz}$
   1.4 $F(x, y, z) = \bar{y}(xz + \overline{xz})$
2. *¿Qué valores de las variables boolenas x, y satisfacen la ecuación $xy = x + y$?*
3. *¿Cuántas funciones boolenas de grado 7 hay?*
4. *Demostrar que $x + xy = x$ para cualesquiera variables booleanas x, y.*

5. Sean x, y, z variables booelanas. Demostrar que

$$x\bar{y} + y\bar{z} + \bar{x}z = \bar{x}y + \bar{y}z + x\bar{z}$$

6. El operador booleano $\oplus$ llamado XOR, se define mediante $1 \oplus 1 = 0, 1 \oplus 0 = 1, 0 \oplus 1 = 1, 0 \oplus 0 = 0$. Sean x, y variables boolenas. Demostrar que
   - 6.1 $x \oplus y = (x + y)\overline{(xy)}$
   - 6.2 $x \oplus y = x\bar{y} + \bar{x}y$
7. Calcular los duales de las siguientes expresiones booleanas.
   - 7.1 $x + y$
   - 7.2 $\bar{x}\bar{y}$
   - 7.3 $xyz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$
   - 7.4 $x\bar{z} + x \cdot 0 + \bar{x} \cdot 1$