Permutaciones con repetición

Hasta ahora hemos contado objetos que no se repiten. Veamos el caso contrario.

Ejemplo

¿Cuántas cadenas de longitud n se pueden formar con las 27 letras del alfabeto español?

Sol.

Tenemos que formar listas de longitud n; la primera letra se puede elegir de 27 formas, la segunda letra de 27 formas, etc. En total 27^n. $\square$

Estas listas se llaman **permutaciones con repetición**.

Teorema

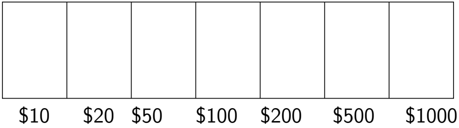
El número de r-permutaciones con repetición de un conjunto con n elementos es n^r.

Combinaciones con repetición

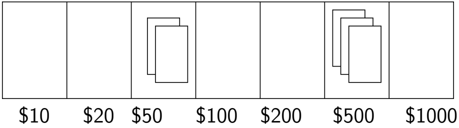
Ejemplo

¿De cuántas formas se pueden seleccionar cinco biletes de una caja registradora que contiene billetes de 10, 20, 50, 100, 200, 500 y 1000?

Sol. Cuando seleccionamos los billetes los colocamos en nuestra propia caja que tiene etiquetas:



Por ejemplo, si tomamos 2 de 50 y 3 de 500:



Tal elección la podemos simbolizar con $|$'s y $*$'s:

$$|| * * ||| * * * ||$$

Por ejemplo, tomar 1 de 10, 1 de 20, 2 de 100 y 1 de 500 es:

$$*| * | * * |||*$$

Así, una selección es de 11 lugares disponibles, poner $|$'s y $*$'s. de hecho sólo importan los $*$'s, pues una vez elegidos éstos, se puede deducir donde están los $|$'s o bien sólo importan los $|$'s. Luego, el número pedido es $C(11, 5)$ ó $C(11, 6)$:

$$C(11, 5) = C(11, 6) = 462.$$

Teorema

En un conjunto con n elementos hay $C(n+r-1,r)$ r-combinaciones con repetición de n elementos.

Sol.

Cada r-combinación con repetición se puede representar como una lista de $n-1$ barras y r asteriscos. Por ejemplo

$$**|*||***$$

es una 6-combinación de 4 elementos, con 2 del primer tipo, 1 del segundo tipo y 3 del cuarto tipo.
El número de estas es

$$C(\underbrace{n-1}_{\text{número de barras}} + \underbrace{r}_{\text{número de asteriscos}}, r) = C(n-1+r, n-1)$$

$\square$

Ejemplo

Supongamos que una tienda de galletas tiene cuatro diferentes tipos de galletas; ¿de cuántas formas se pueden seleccionar 6 galletas?

Sol.

Tenemos 4 tipos. Y una seleción la podemos indicar con barras y asteriscos. Por ejemplo,

$$* * *| * | * | * *$$

indica una selección con 3 del primer tipo de galleta, 1 del segundo tipo, 1 del tercer y 2 del cuarto tipo; estas son 6-combinaciones con repetición de un conjunto de 4, cuyo número total es

$$C(4-1+6,6) = C(9,6) = 84.$$

$\square$

Ejemplo

¿Cuántas soluciones enteras x_1, x_2, x_3 no negativas tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11?$$

Sol. Tenemos que

$$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 11 \qquad (1)$$

y entonces una solución en x_1, x_2, x_3 corresponde a poner un par de barras para separar los unos de la ecuación (1):

$$\underbrace{1+\cdots+1}_{x_1} +| \underbrace{1+\cdots+1}_{x_2} +| \underbrace{1+\cdots+1}_{x_3} = 11$$

por lo que las soluciones forman 11-combinaciones con repetición de un conjunto de 3 elementos. El número de ellas es

$$C(11+3-1, 11) = C(13, 11) = \frac{11!}{2!7!} = 78$$

Ejemplo

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación

$$x_+ x_2 + x_3 = 11$$

si x_1, x_2, x_3 son enteros tales que $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$ y $x_3 \geq 3$?

Sol. Definimos nuevas variables:

$$x_1' = x_1 - 1, x_2' = x_2 - 2, x_3' = x_3 - 3$$

luego

$$x_1' \geq 0, x_2' \geq 0, x_3' \geq 0$$

y tenemos que resolver

$$x_1 - 1 + x_2 - 2 + x_3 - 3 = 11 - 6$$

i.e,

$$x_1' + x_2' + x_3' = 5$$

cuyas soluciones corresponden a 5-combinaciones con repetición de 3 objetos: en total hay

$$C(3+5-1,5) = C(7,5) = 21$$

Ejemplo

¿De cuántas formas se pueden colocar diez bolas iguales en 8 cajas distintas?

Sol. Las bolas se pueden representar con $*$ y las cajas con $|$. Por ejemplo

$$* * *||**|**||*||**$$

corresponde a una 10-combinación con repetición de 8 elementos. En total hay

$$C(8+10-1,10) = C(17,10) = 19,448.$$

Ejemplo

¿Cuántas cadenas distintas se pueden formar reordenando las letras de la palabra PAPAYA?

Sol.

Un reordenamiento corresponde a una selección de

1. las posiciones de las letras A's
2. las posiciones de las letras P's

entonces la letra Y queda completamente determinada:

1. de $C(6,3) = 20$ formas
2. de $C(3,2) = 3$ formas

luego el total es $C(6,3) * C(3,2) = 60$. $\square$

Teorema

El número de n-permutaciones con repetición donde hay n_1 objetos indistinguibles de tipo 1, n_2 objetos indistinguibles de tipo 2,. . . , n_k objetos indistinguibles de tipo k es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Demostración.

Para formar una n-permutación, primero colocamosl los del tipo 1 de $C(n, n_1)$ formas, luego los del tipo 2, de $C(n-n_1, n_2)$ formas, del tipo 3 de $C(n-n_1-n_2, n_3)$ formas,. . . , los del tipo n_k de $C(n-n_1-\cdots-n_{k-1}, n_k)$ formas. Luego hay en total

$$\begin{aligned}C(n,n_1)C(n-n_1,n_2)C(n-n_1-n_2,n_3)\cdots C(n-n_1-\cdots-n_{k-1},n_k)\\ = \frac{n!}{(n-n_1)!n_1!}\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots n_{k-1})!}{0!n_k!}\\ = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}\end{aligned}$$

Ejemplo

¿De cuántas formas se pueden distribuir a cuatro jugadores manos de 5 cartas usando una baraja de 52 cartas?

Sol.

Al primer jugador se le distribuyen sus cartas de $C(52,5)$ formas, al segundo de $C(47,5)$ formas, al tercer de $C(42,5)$ formas y al cuarto de $C(37,5)$. En total

$$C(52,5)C(47,5)C(42,5)C(37,5) = \frac{52!}{5!5!5!5!} =$$

388976539211727809469814028049786684873116827936358400000000

$\square$

Tarea

1. *¿De cuántas formas se pueden asignar tres trabajos a cinco empleados si a cada empleado se le le puede asignar más de un trabajo?*
2. *Todos lis días un estudiante elige al azar un bocadillo de una bandeja de bocadillos preparados. Si hay seis tipos de bocadillos ¿de cuántas formas puede el estudiante elegir los bocadillos para los siete días de la semana si tenemos en cuenta el orden en que los escoge?*
3. *¿De cuántas formas se pueden seleccionar cinco elementos sin ordenar de un conjunto de tres elementos si se permite la repetición?*
4. *¿De cuántas formas se pueden seleccionar tres elementos sin ordenar de un conjunto de cinco elementos si se permite la repetición?*
5. *De cuántas formas se pueden escoger una docena de donas de entre las 21 variedades de una tienda?*

6. En un bar de tapas tiene patatas bravas, calamares, aceitunas, boqueones, jamón, queso tortilla y gambas. ¿De cuántas formas se pueden escoger
   6.1 seis tapas?
   6.2 una docena de tapas?
   6.3 una docena de tapas con al menos uan de cada tipo?
   6.4 una docena de tapas con al menos tres tapas de boquerones y no más de dos tapas de tortilla?
7. Una tienda de cruasanes tiene cruasanes sin relleno, cruasanes con chocolte, cruasanes con crema, cruasanes con nata, cruasanes vegetales y crasanes con salmón. ¿De cuántas formas se pueden escoger
   7.1 una docena de cruasanes?
   7.2 tres docenas de cruasanes?
   7.3 dos docenas de cruasanes con al menos dos de cad clase? dos docenas de cruasanes con no más de dos cruasanes con nata?
   7.4 dos docenas de cruasanes con al menos cinco cruasanes de chocolate y al menos tres de crema?
   7.5 dos docenas de curasanes con al menos un cruasán sin relleno, al menos dos de nata, al menos tres de chocolate, al menos uno de crema, al menos dos vegetales y no más de tres de salmón?

8. ¿De cuántas formas se puede elegir ocho monedas de un bolso que contiene 100 monedas de un euro y 80 monedas de dos euros?
9. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$$

donde x_1, x_2, x_3, x_4 son enteros no negativos?

10. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$$

donde x_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ son enteros no negativos tales que

10.1 $x_1 \geq 1$?

10.2 $x_i \geq 2, i = 1, 2, 3, 4, 5$?

10.3 $0 \leq xi \leq 10, i = 1, 2, 3, 4, 5$?

10.4 $0 \leq xi \leq 3, 1 \leq x2 < 4, x3 \geq 15$?

11. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$$

donde $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ son enteros no negativos tales que

11.1 $x_i > 1$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$?

11.2 $x_i \geq i, \; i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$?

11.3 $x_1 \leq 5$?

11.4 $x_1 < 8$ y $x_2 > 8$?

12. ¿De cuántas formas se pueden distribuir seis bolas indistinguibles en nueve cajas distintas?
13. ¿De cuántas formas se pueden distribuir 12 bolas indistinguibles en seis cajas distintas?
14. ¿De cuántas formas se pueden distinguir 12 objetos distinguibles en seis cajas distinguibles, de forma que se coloquen dos objetos en cada caja?
15. ¿De cuántas formas se pueden distribuir 15 objetos distinguibles entre cinco cajas distintas de forma que las cajas contengan uno, dos, tres cuatro y cinco objetos respetivamente?
16. ¿Cuántas cadenas distintas se pueden formar con las letras de las palabra MISSISSIPPI si hay que utilizarlas todas?
17. ¿Cuántas cadenas distintas se pueden formar con las letras de la palabra ABRACADABRA si hay que utilizar todas las letras?
18. ¿Cuántas cadenas distintas se pueden formar con las letras de AARDVARK si hay que utilizar todas las letras y las tres letras A deben de aparecer de forma consecutiva?

19. ¿Cuántas cadenas distintas se pueden formar con las letras de ORONO si se pueden utilizar todas o una parte de las letras?