Combinaciones

Definición

*Una r-***combinación** *de elementos de un conjunto es un subconjunto de r elementos, es decir, una colección de r elementos sin ordenar.*

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces $\{1, 4, 3\} = \{1, 3, 4\}$ es una 3-combinación de A. Todas las 2-combinaciones de A son

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$$

Definición

Con $C(n, r)$ se denota al número de r-combinaciones de un conjunto de n elementos.

Ejemplo

Sea $A = \{a, b, c, d\}$. Consideremos las 2-combinaciones de A:

$$\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$$

cuyo número es 6. Por lo tanto

$$C(4, 2) = 6$$

También $C(4, 1) = 4$ pues el conjunto de 1-combinaciones de A es:

$$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$$

mientras que $C(4, 0) = 1$ pues la única 0-combinación de A es el conjunto vacío.

También $C(4,4) = 1$ porque el conjunto de 4-combinaciones de A es

$$\{\{a, b, c, d\}\}$$

Teorema

Sea $n \geq r \geq 0$, entonces

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Demostración.

Las r-permutaciones de un conjunto de n elementos se forman de las r-combinaciones por permutación de éstas. Es decir, para obtener las r-permutaciones podemos hacer lo siguiente:

1. poner una r-combinación (de $C(n,r)$ formas);
2. se permutan los elementos de éstas (de $P(r,r) = r!$ formas)

por lo que

$$P(n,r) = C(n,r)r!$$

y despejando

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$\square$

Nótese que

$$C(n, r) = \binom{n}{r}$$

el binomial de n en r.

Ejemplo

¿De cuántas formas se pueden seleccionar cinco jugadores de un grupo de diez para formar un equipo?

Sol.

Tenemos que contar los subconjuntos de 5 elementos de un total de 10. Este es $C(10,5)$:

$$C(10,5) = \frac{10!}{5!5!} = 252.$$

□

Ejemplo

Un grupo de 38 personas han sido entrenadas para ir a Marte. La tripulación contará sólo de seis miembros. ¿De cuántas formas se puede seleccionar la tripulación?

Sol.

$$C(30,6) = \frac{30!}{24!6!} = 593,775$$

Ejemplo

¿Cuántas cadenas de n bits contienen exactamente r unos?

Sol.

Para formar tales cadenas se tienen que elegir las posiciones de los unos de los números $1, 2, 3, \ldots, n$, es decir, se tiene que elegir r números de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, lo cual se puede hacer de

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

formas. $\square$

Ejemplo

De cuántas formas se puede seleccionar una comisión integrada de 3 hombre y 4 mujeres si hay disponibles 9 hombres y 11 mujeres?

Sol.

Primero se pueden elegir los hombre; de $C(9,3) = \frac{9!}{6!3!} = 84$ formas, y enseguida las mujeres, de $C(11,4) = \frac{11!}{7!4!} = 330$ formas. Luego, la comisión se puede elegir de

$$84 * 330 = 27,720$$

formas. $\square$

Tarea

1. *Escribir todas las permutaciones de* $\{a, b, c\}$.
2. *¿Cuántas permutaciones tiene el conjunto* $\{a, b, c, d, e, f, g\}$*?*
3. *¿Cuántas permutaciones del conjunto* $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ *terminan en* a*?*
4. *Sea* $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
   4.1 *Enumera todas las 3-permutaciones de* S.
   4.2 *Enumera todas las 3-combinaciones de* S.
5. *Calcular*
   5.1 $P(6, 3), P(6, 5), P(8, 8), P(10, 9)$
   5.2 $C(5, 1), C(5, 3), C(8, 0), C(12, 6)$.
6. *¿De cuántas formas diferentes pueden terminar una carrera de cinco corredores, si no hay empates?*
7. *¿Cuántas posibilidades hay para las tres primeras posiciones de una carrera de caballos con doce participantes si son posibles todos los órdenes de llegada y no hay empates?*

8. Hay cuatro candidatos en las eleciones para presidente municipal. ¿De cuántas formas distintas se pueden imprimir los nombres en la papeleta electoral?
9. ¿Cuántas cadenas de diez bits contienen
   9.1 exactamente cuatro unos?
   9.2 como mucho cuatro unos?
   9.3 al menos cuatro unos?
   9.4 una cantidad igual de unos y ceros?
10. En un grupo hay n hombres y n mujeres. ¿De cuántas formas se pueden ordenar estas personas en una fila si los hombres y las mujeres se deben alternar?
11. ¿De cuántas formas se pueden escoger un par de números enteros positivos menores que 100?
12. ¿Cuántos subconjuntos con un número impar de elementos tiene un conjunto con diez elementos?
13. ¿Cuántos subconjuntos de más de dos elementos tiene un conjunto con 100 elementos?

14. Se tira una moneda al aire diez veces y los resultados posibles son águila o sol. ¿Cuántos resultados
    14.1 hay en total?
    14.2 tiene exactamente dos soles?
    14.3 tiene al menos tres soles?
    14.4 tiene el mismo número de soles que de águilas?
15. ¿Cuántas cadenas de diez bits tienen
    15.1 exactamente tres ceros?
    15.2 más ceros que unos?
    15.3 al menos siete ceros?
    15.4 al menos tres unos?
16. ¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEFGH contienen
    16.1 la cadena ED?
    16.2 la cadena CDE?
    16.3 las cadenas BA y FGH?
    16.4 las cadenas AB, DE y GH?
    16.5 las cadenas CAB y BED?
    16.6 las cadenas BCA y ABF?

17. Un conjunto de cien papeletas, numeradas del 1 al 100, se venden a cien personas diferentes para una lotería. Hay cuatro premios distintos, el primero de los cuales es un viaje a Cancún. ¿De cuántas formas se pueden repartir los premios si
    17.1 no hay ninguna restricción?
    17.2 la persona con la papeleta número 47 gana el primer premio?
    17.3 la persona con la papeleta gana uno de los premios?
    17.4 la persona con la papeleta número 47 no gana ningún premio?
    17.5 las personas con las papeletas 19 y 47 ganas ambas algún premio.