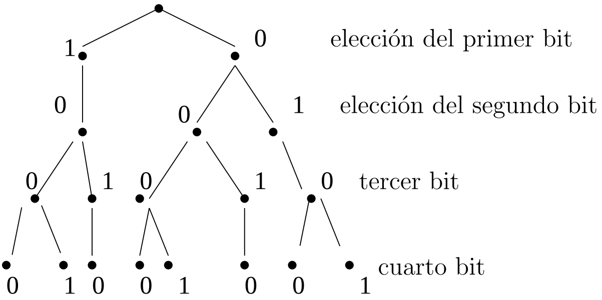
Diagramas de árbol

Ejemplo

¿Cuántas cadenas de bits de longitud cuatro no tienen dos unos consecutivos?

Sol. La eleción del primer bit se puede hace de dos formas. La elección del segundo bit, debido a nuestras restricciones se puede hacer de una forma si el primer bit fué 1 o bien de dos formas si el primer bit fué 0. La elección del tercer bit va a depender de como se eligió el segundo, etc. tales dependencias las podemos visualizar en un diagrama



Los caminos (de arriba hacia abajo) dan las cadenas posibles:

$$000, 1001, 1010, 0000, 0001, 0010, 0100, 0101$$

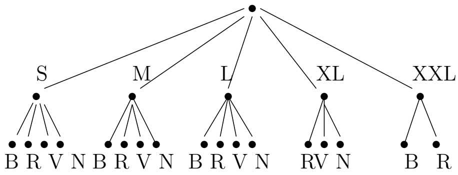
luego hay 8 cadenas.

Ejemplo

Supongamos que un modelo de camiseta se fabrica en cinco tallas: S,M,L,XL,XXL. Supóngase además que cada talla se fabrica en colores blanco, negro, rojo y verde exepto la talla XXL que se fabrica en verde y negro y la XL en rojo, verde y negro. ¿Cuántas camisetas diferentes debe haber en el almacén de una tienda si se quiere tener disponible una de cada modelo?

Sol.

El diagrama de árbol es:



Luego, el número total de modelos es $4 * 3 + 3 + 2 = 17$. $\square$

Principio del palomar

Supóngase un grupo de palomas dispuestas a anidar. Si hay más palomas que nidos entonces debe haber algún nido con más de una paloma.

Teorema

Si $f : A \to B$ función y $|A| > |B|$ con A, B finitos, entonces existen $a \neq a'$ en A tales que $f(a) = f(a')$.

Demostración.

Como $|A| > |B|$ entonces f no puede ser inyectiva, esto es existen $a, a' \in A$ con $f(a) = f(a')$ pero $a \neq a'$. $\square$

Corolario

Si se colocan $K+1$ objetos en K cajas diferentes existe al menos una caja que contiene dos o más objetos.

Demostración.

Sea A el conjunto de objetos y B el conjunto de cajas. Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{K+1}\}$ y $B = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ definimos una función $f : A \to B$ como $f(a_i) = c_j$ si c_j contiene a a_i (es decir, $a_i f c_j$ si c_j contiene a a_i).
Como $|A| > |B|$ entonces existen $a_i \neq a_\ell$ tales que $f(a_i) = f(a_\ell)$, es decir a_i y a_ℓ están en la misma caja. $\square$

Ejemplo

En un grupo de 367 personas debe haber dos personas que cumplan años el mismo día, pues sĺo hay 366 posibles fechas de cumpleaños.

Ejemplo

En un grupo de 28 palabras debe haber al menos dos que comiencen con la misma letra ya que sólo hay 27 letras en el alfabeto español.

Ejemplo

Demostrar que todo número entero n tiene un múltiplo cuya expresión decimal está compuesta sólo de 0's y 1's.

Dem. Consideremos los números

$$1, 11, 111, \ldots, \underbrace{111\cdots1}_{(n+1)-\text{unos}}$$

y pongamos sus residuos al dividir por n:

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, r_{n+1}$$

como los residuos cumplen $0 \leq r_i < n$ entonces tales residuos deben de repetirse, es decir, existen $j \neq i$ tales que $r_j = r_i$. Luego, como

$$\underbrace{11\cdots1}_{j\text{-unos}} = nq_j + r_j$$

y

$$\underbrace{11\cdots1}_{i\text{-unos}} = nq_i + r_i$$

restando lado a lado estas ecuaciones

$$\underbrace{11\cdots1}_{j\text{-unos}} - \underbrace{11\cdots1}_{i\text{-unos}} = n(q_j - q_i)$$

siendo el lado derecho un número con sólo ceros y unos.

Tarea

1. *En un cajón hay una docena de calcetines marrones y una docena de calcetines negros sin marcar. Un hombre elige los calcetines al azar.*
   1.1 *¿Cuántos calcetines debe elegir para asegurar que al menos dos deben de ser del mismo color?*
   1.2 *¿Cuántos calcetines debe elegir para asegurar que al menos dos son negros?*
2. *Supongamos que en una clase hay 9 estudiantes.*
   2.1 *Demuestra que en la clase hay al menos cinco chicos o al menos cinco chicas.*
   2.2 *Demuestra que en la case hay al menos tres chicos o al menos siete chicas.*
3. *Supongamos que en una clase de veinticinco estudiantes todos tienen entre dieciocho y veinte años.*
   3.1 *Demuestra que hay al menos nueve estudiantes que tienen la misma edad.*
   3.2 *Demuestra que hay bien al menos tres estudiantes de deciocho años, bien al menos 19 estudiantes de diecinueve años o bien cinco estudiantes de veinte años en la clase.*

Permutaciones

Definición

Sea A un conjunto finito. Una **permutación (sin repetición)** *de A es una lista ordenada de elementos distintos de A. Si tal lista tiene r elementos se llama r-***permutación***. Por una permutación se entiende una permutación sin repetición.*

Ejemplo

Sea $A = \{a, b, c\}$. Entonces (a, b, c) es una permutación de A. También (b, c, a) es una permutación de A diferente a la anterior. Mientras que (a, c) es una 2-permutación de A, (b, c) es 2-permutación de A, (c, b) es otra permutación de A.

Definición

Con $P(n, r)$ se denota el número de r-permutaciones de un conjunto con n elementos.

Ejemplo

Sea $A = \{a, b, c\}$, entonces las 2-permutaciones de A son

$$(a, b), (b, a), (c, a), (a, c), (b, c), (c, b)$$

luego $P(3, 2) = 6$. Las 1-permutaciones de A son

$$(1), (2), (3)$$

por lo que $P(3, 1) = 3$. Mientras que las 3-permutaciones (=permutaciones) de A son

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$$

de donde $P(3, 3) = 6$.

Si se quiere calcular $P(n, r)$ siguiendo el procedimiento anterior, este no resulta muy eficiente. Es mejor usar

Teorema

Si $n \geq r$

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

Dem.

Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto con n elementos. Luego para formar una r-permutación se tiene que elegir un primer elemento de A lo cual se puede hacer de n formas. La elección del segundo elemento se puede hacer de $n-1$ formas pues no se debe de repetir el primero, similarmente el tercer elemento se puede elegir de $n-2$ formas, etc. El último elemento de la lista, es decir, el r-ésimo se puede elegir de $n-r+1$ formas. Luego, segun la regla del producto generalizada, tenemos que

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

$\square$

Ejemplo

¿Cuántas formas existen de escoger el primer, segundo y tercer clasificado de un concurso, si hay un total de 100 concursantes?

Sol.

Los primeros tres lugares forman listas de 3 elementos, i.e., 3-permutaciones de un conjunto de 100 concursantes. Luego, el número pedido es

$$P(100, 3) = 100 * 99 * \underbrace{98}_{100-3+1} = 970, 200$$

$\square$

Ejemplo

Supongamos na carrera con 8 participantes. El ganador recibe oro, el segundo lugar plata y el tercer bronce ¿de cuántas formas distintas se pueden distribuir las medallas si no hay empates?

Sol.

Los medallistas formas listas de 3 elementos, esto es 3-permutaciones de 8 elementos. El número pedido es

$$P(8,3) = 8 * 7 * \underbrace{6}_{8-3+1} = 336.$$

$\square$

Ejemplo

Supongamos que un agente viajero debe visitar 8 ciudades diferentes. Debe de comenzar su trabajo en una ciudad prefijada, pero tiene libertad de elegir las restantes ¿De cuántas formas distintas puede organizar su viaje?

Sol.

Las restantes 7 ciudades forman listas de 7 elementos de un total de 7. Por lo que la respuesta es

$$P(7,7) = 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * \underbrace{1}_{7-7+1} = 7! = 5040$$

$\square$

Ejemplo

¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEFGH contienen la cadena ABC?

Sol.

En tales permutaciones la cadena ABC se comporta como una sola letra. Luego, el número pedido es

$$P(6,6) = 6! = 720.$$

$\square$