Un camino de g a d es

$$g, f, d$$

de longitud 2. Otro es

$$g, f, c, a, b, c, d.$$

Nótese que la sucesión a, b, c se puede eliminar para obtener otro camino más corto:

$$g, f, c, d.$$

Este hecho se puede generalizar

Teorema

Si G es un grafo no dirigido conexo entonces existe un camino simple entre cualesquiera dos vértices distintos.

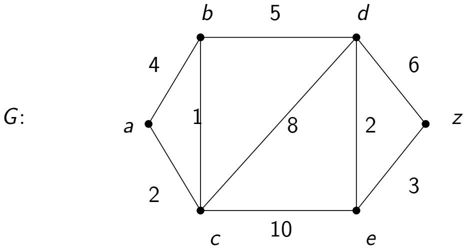
Caminos más cortos

Definición

Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ *se dice* **pesado** *si existe una función* $w : E \to \mathbb{R}$. *En tal caso* w *se llama función de peso.*

Ejemplo

El siguiente es un grafo pesado.



Definición

Sea $G = (V, E)$ *grafo no dirigido y* $v \in V$*. El conjunto de vértices vecinos de* v *es*

$$N(v) = \{u \in V \ : \ u \text{ es adyacente a} v\}.$$

Ejemplo

En el grafo anterior $N(e) = \{c, d, z\}$.

Definición

Sea $G = (V, E)$ *grafo no dirigido pesado con peso* w. *Sean* $a, z \in V$ *y* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *un camino de* a *a* z. *La* **longitud** *de este camino es* $w(e_1) + \cdots + w(e_n)$.

Ejemplo

En el grafo anterior: la longitud del camino a, c, d, z es $2 + 8 + 6 = 16$.

Ahora, queremos encontrar la longitud del camino más corto entre dos vértices.

Problema: Sea G un grafo no dirigido conexo simple y pesado con peso $w \geq 0$. Sean a, z dos vértices en G con $a \neq z$. Encontrar la longitud mínima entre todos los caminos de a a z.

Sol.

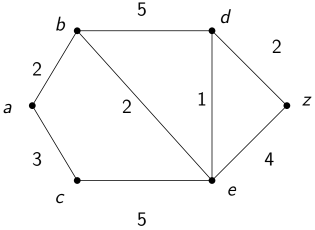
Algoritmo de Dijkstra:

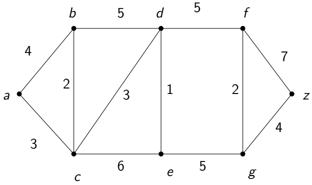
Procedimiento:

1. Todos los vértices son no marcados.
2. Se añaden etiquetas $L(v) = \infty$, $\forall v \neq a$ y $L(a) = 0$.
3. Repetir mientras z no sea marcado:
   3.1 Para cada $v \in N(a)$ no marcado: si $L(a) + w(\{a, v\}) < L(v)$ entonces $L(v) := L(v) + w(\{a, v\})$.
   3.2 Marcar a a.
   3.3 Tómese $u \in V$ no marcado tal que $L(u)$ sea mínima.
   3.4 $a := u$ e ir a (a).
4. Salida: $L(z)$ es la longitud del camino más corto de a a z.

Tarea

Encontrar la longitud del camino más corto, de a a z, mediante el algoritmo de Dijkstra:

1. 

2. 

Combinatoria

Para contar hay dos principios básicos:

- regla del producto
- regla se la suma

Regla del producto:
supóngase que una tarea se puede dividir en dos tareas consecutivas. Si hay n **formas de realizar la primera tarea y** m **formas de hacer la segunda tarea después de que se ha completado la primera tarea, entonces hay** nm **formas de completar la tarea original.**

Ejemplo

Si se quiere etiquetar las butacas de un auditorio con una letra (del alfabeto inglés) y un número entero positivo ≤ 100 ¿cuál es el número máximo de butacas que se les puede asignar una etiqueta diferente?

Sol.

La tarea de etiquetar las butacas se puede dividir en dos partes:

1. poner una letra;
2. poner un número positivo ≤ 100.

La primera tarea se puede completar de 26 formas y la segunda de 100. Luego hay 26*100=2,600 butacas diferentes. $\square$

Ejemplo

En una sala hay 32 computadoras. Cada computadora tiene 24 puertos. ¿Cuántos puertos diferentes hay en la sala?

Sol.

La tarea de contar los puertos se puede dividir en dos:

1. elegir computadora;
2. elegir los puertos.

La primera tarea se completa de 32 formas, y la segunda de 24 formas. Por lo tanto, según la regla del producto hay 32*24=768 puertos. □

Regla del producto generalizada:

supóngase que una tarea T requiere de realizar sucesivamente las tareas $T_1, T_2, \ldots, T_m$. Si cada tarea T_i puede realizarse de n_i formas después de completar las tareas $T_1, T_2, \ldots, T_{i-1}$, $2 \leq i \leq m$, entonces hay $n_1 * n_2 * \cdots * n_m$ formas de hacer la tarea T.

Ejemplo

¿Cuántas cadenas de bits diferentes hay de longitud 7?

Sol.

El primer bit se puede elegir de dos formas, el segundo de dos formas también, el tercer de dos,. . . ,el séptimo también. Luego el número de bits de longitud 8 es

$$\underbrace{2 * 2 * \cdots * 2}_{\text{7 veces}} = 2^7 = 128$$

$\square$

Ejemplo

¿Cuántas matrículas están disponibles si cada una contiene una serie de tres letras seguidas de tres dígitos?

Sol.

El matricular se puede hacer en varias etapas: poner la primera letra, la segunda y luego la tercera. Entonces poner el primer, segundo y tercer dígito.
La primera letra se puede poner de 26 formas, igual que la segunda y tercera. Mientras que el primer dígito se puede poner de 10 formas diferentes, igual que el segundo y el tercer. Así, el total de matrículas es

$$26^3 * 10^3 = 17,576,000.$$

$\square$

Ejemplo

Sea A un conjunto con m elementos y B un conjunto con n elementos. ¿Cuántas funciones $f : A \to B$ se pueden definir?

Sol. Supongamos que

$$A = \{a_1, \ldots, a_m\}, \quad B = \{b_1, \ldots, b_n\}$$

con $|A| = m$ y $|B| = n$.

La tarea de definir una función $f : A \to B$ se puede hacer en varias etapas:

$$\begin{aligned} 1)&\ \text{definir } f(a_1) \\ 2)&\ \text{definir } f(a_2) \\ &\ \vdots \\ m)&\ \text{definir } f(a_m) \end{aligned}$$

La primera de estas tareas se puede hacer de n formas, la segunda de n,..., la m-ésima de n formas. Luego el total de funciones pedidas es

$$n \cdots n = n^m = |B|^{|A|}.$$

Por ejemplo hay 5^3 funciones de $\{1,2,3\}$ en $\{a,b,c,d,e\}$.

Ejemplo

¿Cuántas funciones inyectivas de $\{a, b, c, d\}$ en $\{1, 2, 3\}$ se pueden definir?

Sol.

Ninguna, pues si $f : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3\}$ es inyectiva entonces, el conjunto de imágenes cumple

$$\{f(a), f(b), f(c), f(d)\} \subseteq \{1, 2, 3\}$$

siendo que el conjunto del lado izquierdo tiene cuatro elementos diferentes dentro de un conjunto de tres elementos: un absurdo. $\square$

El mismo argumento muestra la siguiente propiedad.

Propiedad

Si $f : A \to B$ *es función inyectva y* A *tiene* m *elementos y* B *tiene* n*. Entonces* $m \leq n$*.*

Demostración.

Sea $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, entonces $\{f(a_1), \ldots, f(a_m)\} \subseteq B$ donde B tiene n elementos; luego $m \leq n$. $\square$

Ejemplo

¿Cuántas funciones inyectivas de $\{a, b, c\}$ en $\{1, 2, 3, 4\}$ se pueden definir?

Sol.

Primero podemos elegir $f(a)$ de 4 formas, luego $f(b)$ no debe repetirse de la elección anterior luego $f(b)$ puede elegirse de 3 formas y $f(c)$ de 2. Por lo que hay $4 * 3 * 2 = 24$ funciones inyectivas. $\square$

Propiedad

Si A es conjunto con m elementos, B conjunto con n elementos y $m \leq n$, entonces hay

$$n(n-1)\cdots(n-m+1)$$

funciones inyectivas $f : A \to B$ inyectivas.

Demostración.

Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Luego para definir $f : A \to B$ inyectiva primero se tiene que definir $f(a_1)$ de n formas, $f(a_2)$ de $n-1$ formas,$\ldots$, $f(a_m)$ de $n-m+1$. Luego hay

$$n(n-1)\cdots(n-m+1)$$

funciones inyectivas. $\square$

Propiedad

Si $f : A \to B$ es función biyectiva con A y B finitos, entonces $|A| = |B|$.

Demostración.

Tenemos que $f : A \to B$ es inyectiva, luego $|A| \leq |B|$; pero también que $f^{-1} : B \to A$ es función y además inyectiva (pues $(f^{-1})^{-1} = f$). Entonces $|B| \leq |A|$.

$$\therefore |A| = |B|$$

$\square$

Teorema

Si A es un conjunto finito entonces $|2^A| = 2^{|A|}$.

Dem. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de cadenas de bits de longitud $|A| = n$. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Definiremos una función

$$f : 2^A \to \mathcal{C}$$

de la siguiente manera: si $B \subseteq A$ se define $f(B) = c_1 \cdots c_n$ donde cada c_i es 0 ó 1 elegido de la forma

$$c_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } a_1 \notin B \\ 1 & \text{si } a_1 \in B \end{cases}$$

$$c_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } a_2 \notin B \\ 1 & \text{si } a_2 \in B \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n \notin B \\ 1 & \text{si } a_n \in B \end{cases}$$

(Por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$ entonces

$$\begin{aligned} f(\varnothing) &= 000 & f(\{a,b\}) &= 110 \\ f(\{a\}) &= 100 & f(\{a,c\}) &= 101 \\ f(\{b\}) &= 010 & f(\{b,c\}) &= 011 \\ & & f(\{a,b,c\}) &= 111) \end{aligned}$$

Claramente f es biyectiva, luego

$$|2^A| = |\mathcal{C}| = 2^n = 2^{|A|}.$$

Tarea

1. *En cierta universidad hay 18 estudiantes de ingeniería y 325 de licenciatura.*
   1.1 *¿De cuántas maneras se pueden escoger dos representantes, de forma que uno de ellos sea estudiantes de ingeniería y el otro de licenciatura?*
   1.2 *¿De cuántas maneras se puede escoger un representante que sea estudiante de ingeniería o de licenciatura?*
2. *Un edificio tiene 27 pisos y cada piso tiene 37 oficinas ¿Cuántas oficinas tiene el edificio?*
3. *Un cuestionario se compone de diez preguntas, cada una de las cuales tiene una de cuatro posibilidades.*
   3.1 *¿De cuántas formas puede contestar un estudiante al cuestionario si responde a todas las respuestas?*
   3.2 *¿De cuántas formas puede contestar un estudiante si puede dejar preguntas sin contestar?*

4. Cierta marca de camiseta se fabrica en 12 colores en tres tallas distintas y tiene modelos diferentes para hombre y mujer. ¿Cuántos modelos diferentes de camiseta se fabrican?
5. ¿Cuántas cadenas distintas de tres mayúsculas se pueden formar?
6. ¿Cuántas cadenas de 8 bits existen?
7. ¿Cuántas cadenas de diez bits empiezan y terminan en 1?
8. ¿Cuántas cadenas de bits hay de longitud seis o menor?
9. ¿Cuántas cadenas de n bits donde n es un entero positivo empiezan y terminan con 1?