Isomorfismo de grafos

La información esencial de un grafo no está dada exactamente por su diagrama, sino por la conecciones marcadas por las aristas.

Definición

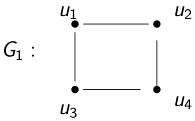
Sea $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ grafos simples. Se dice que G_1 es **isomorfo** *a G_2 si existe $f : V_1 \to V_2$ función biyectiva tal que*

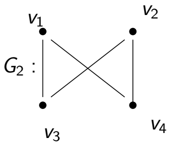
$$e = \{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2.$$

En tal caso f se dice **isomorfismo** *entre G_1 y G_2.*

Ejemplo

Sean





entonces G_1 es isomorfo a G_2 pues existe $f : V_1 \to V_2$ dada por

$$f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_4, f(u_4) = v_2, f(u_3) = v_3.$$

f es isomorfismo pues las aristas de G_1 mediante f corresponden a aristas de G_2:

E_1	E_2
$\{u_1, u_2\}$	$\{f(u_1), f(u_2)\} = \{v_1, v_4\}$
$\{u_2, u_4\}$	$\{f(u_2), f(u_4)\} = \{v_4, v_2\}$
$\{u_4, u_3\}$	$\{f(u_4), f(u_3)\} = \{v_2, v_3\}$
$\{u_3, u_1\}$	$\{f(u_3), f(u_1)\} = \{v_3, v_1\}$

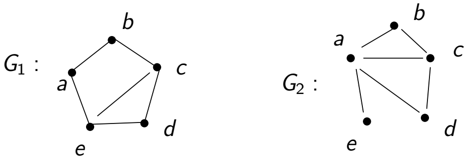
Si $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfos entonces

1. $|V_1| = |V_2|$
2. $|E_1| = |E_2|$
3. Si $v \in V_1$ entonces $\delta(v) = \delta(f(v))$

donde $f : V_1 \to V_2$ es isomorfismo. En general dos grafos son isomorfos si tienen exactamente las mismas propiedades. Luego si encontramos un par de grafos que no comparten las mismas propiedades, entonces no son isomorfos.

Ejemplo

Sean



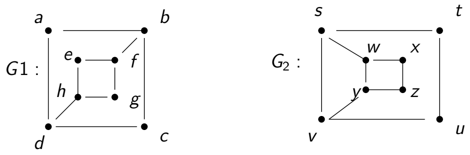
Demostrar que G_1 no es isomorfo a G_2.

Sol.

El grafo G_2 tiene un vértice de grado uno: $\delta(e) = 1$, pero todos los grados de los vértices de G_1 son de grado diferente a uno. Por lo tanto, no pueden ser isomorfos. $\square$

Ejemplo

Sean



Determinar si G_1 es isomorfo a G_2.

Sol.

Supongamos que sí son isomorfos y que f es un isomorfismo entre G_1 y G_2. Como $\delta(a) = 2$ entonces $\delta(f(a)) = 2$. Como los elementos de grado 2 de G_2 son

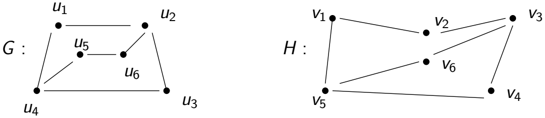
$$x, z, t, u$$

entonces $f(a) = x$ o $f(a) = z$ o $f(t) = 2$ o $f(a) = u$. Pero todos éstos se conectan con vértices de grado 2, lo cual no ocurre con a (los vecinos de a tienen grado 3). $\square$

Si G, H son grafos tales que *para alguna numeración de sus vértices* $A_G = A_H$ entonces G es isomorfo a H.

Ejemplo

Determinar si los grafos siguientes son isomorfos:



Sol.

Tenemos la matrices de adyacencia:

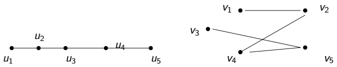
$$A_G = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \text{ y } A_H = \begin{array}{c} \\ v_6 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_6 & v_3 & v_4 & v_5 & v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esto es, $A_G = A_H$ de donde se sigue que H y G son isomorfos.

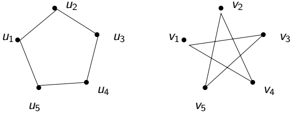
Tarea

1. *Determinar si el par de grafos dados es isomorfo o no. Construir un isomorfismo o proporcionar un argumento riguroso que demuestre que no son isomorfos.*

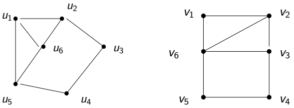
   1.1



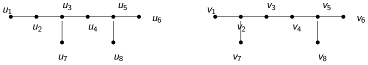
   1.2



   1.3



   1.4



Conexidad

Un **camino** en un grafo es una secuencia de aristas que comienza en un vértice y viaja de vértice en vértice a lo largo de tales aristas.

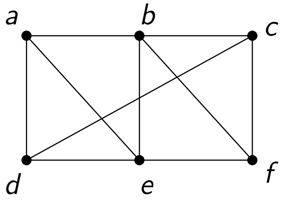
Definición

Sea n un entero no negativo y G un grafo no dirigido.

1. *Un* **camino no dirigido de longitud** *n del vértice u al vértice v es una sucesión de aristas $e_1, \ldots, e_n$ tales que e_1 une a $u = x_0$ con x_1, e_2 une a x_1 con x_2, ..., e_n une a x_{n-1} con $x_n = v$.*
2. *Cuando el grafo es simple, se denota el camino por la secuencia de vértices que une: $x_0, x_1, \ldots, x_n$.*
3. *El camino se llama* **circuito** *si comienza y termina en el mismo vértice: $u = v$.*
4. *El camino se dice que* **pasa a través** *de los vértices $x_1, \ldots, x_{n-1}$ o que* **atraviesa** *las aristas $e_1, \ldots, e_n$.*
5. *Un camino es* **simple** *si no contiene la misma arista más de una vez.*

Ejemplo

El siguiente es un grafo no dirigido simple:



entonces a, d, c, f, e es un camino simple de longitud 4, pues $\{a, d\}$, $\{d, c\}$, $\{c, f\}$ y $\{f, e\}$ son aristas. Pero d, e, c, a no es un camino, porque $\{e, c\}$ no es una arista.
Que b, c, f, e, b es un circuito de longitud 4 es porque $\{b, c\}$, $\{c, f\}$, $\{f, e\}$, $\{e, b\}$ son aristas. El camino a, b, e, d, a, b de longitud 5, es no simple pues contiene la arista $\{a, b\}$ dos veces.

Teorema

Sea G un grafo, A_G su matriz de adyacencia y $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ vértices de G. Entonces, para cualesquiera vértices v_i, v_j, el número de caminos de v_i a v_j de longitud m es la entrada i, j de A_G^m.

Dem. Sea $A_G = (a_{i,j})_{i,j}$ Primero nótese que el número de caminos de longitud 1 de v_i a v_j es $a_{i,j}$. Ahora, los caminos de longitud 2 de v_i a v_j se obtienen de ir de v_i a otro vértice v_k y de v_k a v_j. Para cada v_k, número de formas de hacer lo primero es $a_{i,k}$ y lo segundo es $a_{k,j}$; luego el total es $a_{i,k}a_{k,j}$. Luego sumamos sobre todos los posibles v_k:

$$\sum_k a_{i,k}a_{k,j}$$

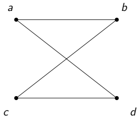
que es la entrada i, j de A_G^2 y es el total de caminos de longitud 2 de v_i a v_j. Similarmente

$$\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_{m-1}} a_{i,k_1}a_{k_2,k_3}\cdots a_{k_{m-1},k_{m-1}}a_{k_{m-1},j}$$

es la entrada i, j de A_G^m y el número de caminos de longitud m de v_i a v_j.

Ejemplo

Calcular el número de caminos de longitud 4 que hay entre a y c en el siguiente grafo.



Sol. Pongamos la matriz de adyacencia

$$A_G = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

entonces el número pedido es la entrada (a, c) de la potencia

$$A_G^4 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

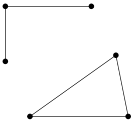
que es 8.

Definición

Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ se dice **conexo** *si para cualesquiera vértices $u, v \in V$ con $u \neq v$ existe un camino de u a v.*

Ejemplo

El siguiente grafo no es conexo:



Mientras que el siguiente sí es conexo.