Teorema (Apretones de mano)

Sea $G = (V, E)$ *un grafo no dirigido con* $e = |V|$. *Entonces*

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2e.$$

Ejemplo

¿Cuántas aristas hay en un grafo con diez vértices si cada una de las cuales stiene grado 6?

Sol.

Por el teorema de apretones de manos:

$$2e = \sum_{v \in V} \delta(v) = 10 * 6$$

de donde $e = 30$. $\square$

Corolario

Todo grafo no dirigido $G = (V, E)$ tiene un número par de vértices de grado impar.

Demostración.

Sea V_1 el conjunto de vértices de grado par y V_2 el de grado impar. Entonces

$$2|E| = \sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V_1} \delta(v) + \sum_{v \in V_2} \delta(v)$$

lo que implica que

$$\underbrace{2|E| - \underbrace{\sum_{v \in V_1} \delta(v)}_{\text{par}}}_{\text{par}} = \sum_{v \in V_2} \underbrace{\delta(v)}_{\text{impar}}$$

Como la única forma que la suma de impares sea par es con un número de sumandos par, se sique que $|V_2|$ es par. $\square$

Definición

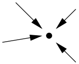
Si $e = (u, v)$ es una arista de un grafo dirigido G entonces

1. *u es* **adyacente** *a v;*
2. *v es* **adyacente** *desde u;*
3. *u es* **vértice inicial**, **vértice final** *de e.*

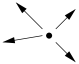
Definición

Sea v vértice de un grafo G dirigido:

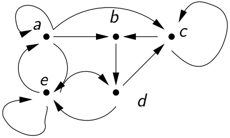
1. *$\delta^{-}(v)$ es el* **grado de entrada** *de v y este es el número de aristas que tiene a v como vértice final.*



2. *$\delta^{+}(v)$ el el* **grado de salida** *de v y el número de aristas que tiene a v como vértice inicial.*



Ejemplo



$$\delta^-(a) = 2 \qquad \delta^+(a) = 4$$
$$\delta^-(b) = 2 \qquad \delta^+(b) = 1$$
$$\delta^-(c) = 3 \qquad \delta^+(c) = 2$$
$$\delta^-(d) = 2 \qquad \delta^+(d) = 2$$
$$\delta^-(e) = 3 \qquad \delta^+(e) = 3$$

Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido. Entonces

$$\sum_{v \in V} \delta^-(v) = |E| = \sum_{v \in V} \delta^+(v).$$

Dem. Sea $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Para cada $v_i \in V$ ponemos

$$V^-(v_i) = \{(u, v_i) \in E \mid u \in V\}.$$

Luego $\delta^-(v_i) = |V^-(v_i)|$; además

$$E = V^-(v_1) \cup V^-(v_2) \cup \dots V^-(v_n)$$

pues si $e \in E$ entonces $e = (v_i, v_j) \in V(v_i)$. También si $i \neq j$ entonces $V^-(v_i) \cap V(v_j) = \varnothing$ pues en otro caso $\exists e \in V^-(v_i) \cap V^-(v_j)$ lo que implica que e tiene vértice final v_i y v_j, esto es $v_i = v_j$: absurdo.

Luego,

$$\begin{aligned} |E| = |V^{-}(v_1)| + |V^{-}(v_2)| + \cdots + |V^{-}(v_n)| \\ = \delta^{-}(v_1) + \delta^{-}(v_2) + \cdots + \delta^{-}(v_n). \end{aligned}$$

Similarmente para δ^{+}.

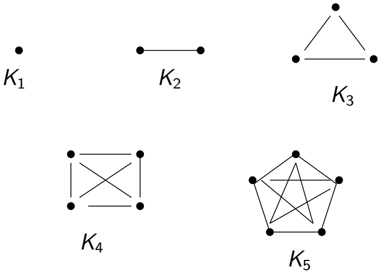
Hay grafos especiales:

Ejemplo (Grafos completos)

Sea $n \geq 1$, $n \geq 1$.

K_n:

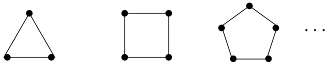
- Vértices: n vértices.
- Aristas: exactamente una arista entre dos vértices.



Ejemplo (Ciclos)

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Luego

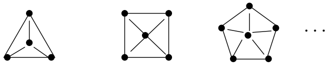
- Vértices: $v_1, v_2, \ldots, v_n$;
- Aristas: $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_n\}, \ldots, \{v_n, v_1\}$.



C_3 C_4 C_5

Ejemplo (Ruedas)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.



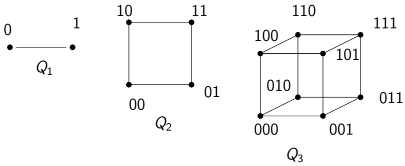
W_3 W_4 W_5

Ejemplo (Cubos)

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Q_n:

- *Vértices: cadenas de bits de longitud* n.
- *Aristas: dos cadenas son adyacentes si y sĺo si difieren exactamente por un bit.*

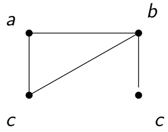


Tarea

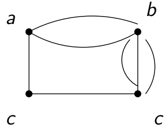
1. *¿Qué clase de grafo puede ser usado para modelar un sistema de carreteras entre ciudades donde*
    1.1 *hay una arista entre los vértices representando ciudades si hay una carretera interestatal entre ellos?*
    1.2 *hay una arista entre los vértices representando ciudades para cada carretera interestatal entre ellas?*
    1.3 *hay una arista entre vértices representando ciudades para cada car- retera interestatal entre ellas y hay un lazo en cada vértice represen- tando una ciudad si hay una carretera interestatal que rodea la ciudad?*

2. Determine la clase de grafo que se muestra (simple, multigrafo, etc):

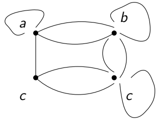
   2.1



   2.2



   2.3



3. El grafo de intersección de una colección de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es el grafo con vértices : $A_1, A_2, \ldots, A_n$ aristas: el vértice i se une con el j si $A_i \cap A_j \neq \varnothing$. Construir el grafo de intersección de las siguientes colecciones de conjuntos:

3.1 $A_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}, A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}, A_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}, A_4 = \{5, 6, 7, 8, 9\}, A_5 = \{0, 1, 8, 9\}$

3.2

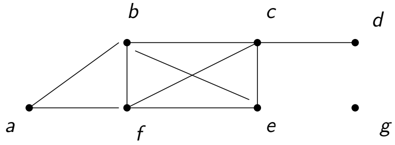
$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, \ldots\} \\
A_2 &= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \\
A_3 &= \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\} \\
A_4 &= \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\} \\
A_5 &= \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}
\end{aligned}
$$

3.3

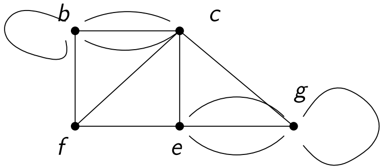
$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{x \,|\, x < 0\} \\
A_2 &= \{x \,|\, 1 < x < 0\} \\
A_3 &= \{x \,|\, 1 < x < 1\} \\
A_4 &= \{x \,|\, 0 < x < 1\} \\
A_5 &= \{x \,|\, x > 1\}
\end{aligned}
$$

4. Hallar el número de vértices, el número de aristas y el grado de cada vértice:

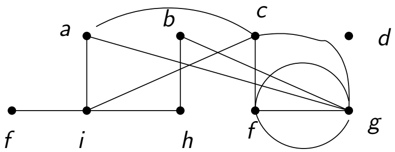
4.1



4.2



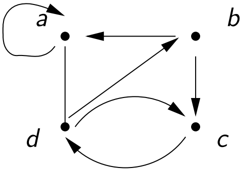
4.3



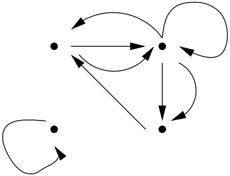
5. Hallar la suma de los grados de los vértices para cada grafo del problema anterior y comprobar que es el doble del número de aristas.
6. ¿Puede existir un grafo con 15 vértices, cada uno de ellos de grado 5?
7. Para cada una de las personas que asisten a una fiesta se considera el número de personas a las que ha saludado dándoles la mano. Demuestrar que la suma de todos esos números es un número par. Se supone que nadie se da la mano a sí mismo.

8. Determinar el número de vértices y de aristas, hallar los grados de entrada y de salida de cada uno de los vértices del multigrafo correspondiente.

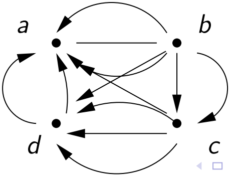
8.1



8.2



8.3



9. Para cada uno de los anteriores determinar la suma de los grados de entrada y la suma de los grados de salida. Comprobar que ambos son iguales al número de aristas que hay en el grafo.
10. ¿Cuántas aristas tiene un grafo si los grados de sus vértices son 4,3,3,2,2? Dibujarlo.
11. ¿Cuántas aristas tiene un grafo si los grados de sus vértices son 5,2,2,2,2,1? Dibujarlo.
12. ¿Existe algún grafo simple de seis vértices con los grados siguientes?. Si es así, dibuja un grafo con esta propiedad.
    12.1 0,1,2,3,4,5
    12.2 1,2,3,4,5,6
    12.3 2,2,2,2,2,2
    12.4 3,2,3,2,3,2
    12.5 3,2,2,2,2,3
    12.6 3,3,3,3,3,5
    12.7 1,1,1,1,1,1
    12.8 1,2,3,4,5,5

13. Sea G un grafo con v vértices y e aristas. Sea M el máximo grado entre los vértices de G y sea m el mínimo grado de entre los vértices de G. Demostrar que

13.1 $\frac{2e}{v} \geq m$

13.2 $\frac{2e}{v} \leq M$