Teorema

Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ funciones.

1. *Si f y g son inyectivas entonces $g \circ f$ es inyectiva.*
2. *Si f y g son suprayectivas entonces $g \circ f$ es suprayectiva.*
3. *Si f y g son biyectivas entonces $g \circ f$ es biyectiva.*

Demostración.

1. Tarea
2. Tenemos que
$$g \circ f : A \to C.$$
Sea $c \in C$. Queremos mostrar que la ecuacón
$$(g \circ f)(x) = c$$
es soluble en x.
Como g es sobre, existe $y \in B$ tal que $g(y) = c$. A su vez, como f es sobre, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Luego

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= g(y) \\
&= c.
\end{aligned}
$$

3. Como f y g son inyectivas y suprayectivas, entonces, según el inciso anterior $g \circ f$ es inyectiva y suprayectiva. Esto es $g \circ f$ es biyectiva

Tarea

Sea $f : A \to B$ relación. Demostrar que

1. $Dom\, f^{-1} = Im\, f$
2. $Im\, f^{-1} = Dom\, f$.

Tarea

Muestre que si $f : A \to B$, $g : B \to C$ son funciones tales que $g \circ f = Id_A$ entonces f es inyectiva y g es suprayectiva.

Tarea

Sean $f : A \to B$ *y* $g : B \to C$ *funciones.*

1. *Si* f *y* $g \circ f$ *son inyectivas, ¿es* g *inyectiva? Explicar.*
2. *Si* f *y* $g \circ f$ *son suprayectivas, ¿es* g *suprayectiva?. Explicar*

Tarea

Sea $f : A \to B$ *una relación tal que es función y* $f^{-1} : B \to A$ *relación inversa. Demostrar que*

1. $$f^{-1} \circ f = Id_A \Leftrightarrow f \text{ es inyectiva.}$$

2. $$f \circ f^{-1} = Id_B \Leftrightarrow f \text{ es sobreyectiva.}$$

Tarea

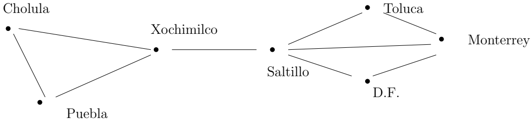
En criptografía una encriptación de un conjunto de textos T *es una función* $E_k : T \to C$ *donde* C *es un conjunto de cadenas llamadas* **encriptamientos** *y* k *es la* **clave** *de encriptación. Una* **desencriptación** *es una función* $D_k : C \to T$ *tal que*

$$(\forall t \in T) D_k(E_k(t)) = t$$

Demostrar que la encriptación no puede encriptar dos textos diferentes de la misma forma y que cualquier texto puede ser la desencriptación de algúna cadena.

Grafos

Supóngase varias computadoras en diferentes ciudades conectadas por una red telefónica:



Tal dibujo representa un *grafo simple.*

Definición

Un **grafo simple** G *es un par* (V, E) *donde* V *es un conjunto no vacío de vértices y* E *es un conjunto formado por parejas no ordenadas de vértices distintos.*

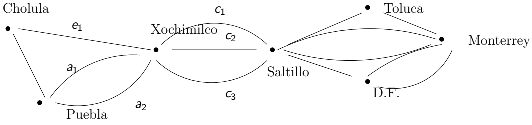
Ejemplo

En el dibujo anterior:

$$V = \{Cholula, Puebla, Xochimilco, Saltillo, Toluca, D.F., Monterrey\}$$

$$E = \{\{Cholula, Puebla\}, \{Cholula, Xochimilco\}, \{Puebla, Xochimilco\},$$
$$\{Xochimilco, Saltillo\}, \{Saltillo, Toluca\}, \{Saltillo, Monterrey\}, \{Saltillo, D$$
$$\{Toluca, Monterrey\}, \{D.F., Monterrey\}\}$$

Si en ejemplo anterior se tienen varias lineas telefónicas entre computadoras:



se tiene entonces un *multigrafo*.

Definición

Un **multigrafo** *G es un par (V, E) donde V es un conjunto de vértices y E es un conjunto de aristas; además de una función*

$$f : E \to \{\, \{u, v\} \mid u, v \in V \text{ con } u \neq v\}$$

Se dice que las aristas e_1, e_2 son **paralelas** *o* **múltiples** *si $f(e_1) = f(e_2)$.*

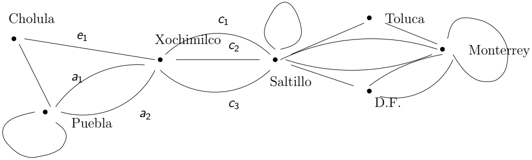
La función f dice los vértices que son unidos por una arista.

Ejemplo

El el diagrama anterior:

$$f(e_1) = \{Cholula, Xochimilco\}, \quad f(a_1) = \{Puebla, Xochimilco\},$$
$$f(a_2) = \{Puebla, Xochimilco\}$$

Ni en los grafos simples, ni en los multigrafos se admiten bucles: para eso están los **pseudografos**:



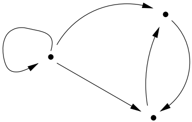
Definición

Un **pseudografo** *G es un par (V, E) donde V es un conjunto de vértices y E de aristas; además de una función*

$$f : E \to \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$$

Una arista e es un **bucle** *o* **lazo** *si $f(e) = \{u, u\} = \{u\}$ para algún $u \in V$.*

Un *grafo dirigido* o *digrafo* es algo como:



Definición

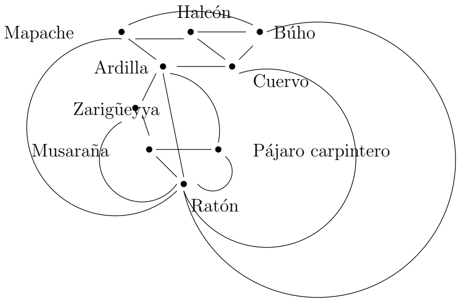
Un **grafo dirigido** *G es un par (V, E) donde V es un conjunto de vértices y E es un conjunto de pares ordenados de vértices llamados aristas.*

Similarmente a los anterior existen grafos dirigidos simples, multigrafos y pseudografos.

Ejemplo (Grafos de solapamiento en Ecología)

- Vértices: especies animales
- Aristas: se conecta dos vertices a y b si la especia a compite con la especie b, es decir, si tienen la misma fuente de alimento.

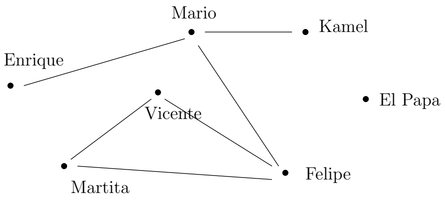
Por ejemplo:



Significa que los ratones compiten con casi todos.

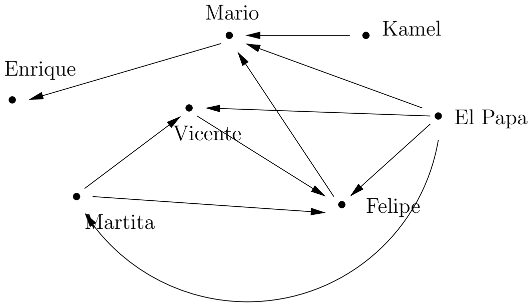
Ejemplo (Grafos de conocidos)

- Vértices: personas.
- Aristas: se conecta la persona a con la b si son amigos.



Ejemplo (Grafo de influencia)

- Vértices: personas.
- Aristas: $a \to b$ si a influye sobre b.



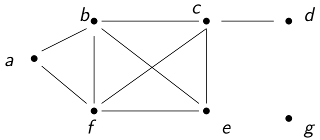
Definición

Sea G un grafo no dirigido. Dos vértices u, v se dicen **adyacentes** *o* **vecinos** *si $\{u, v\}$ es arista de G. Si $e = \{u, v\}$ es arista de G entonces e es* **incidente** *con u y v y se dice que e* **conecta** *u con v; también se dice que u, v son* **extremos** *de e.*

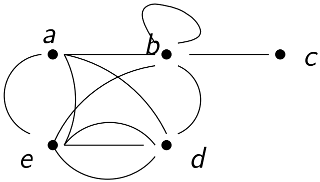
Definición

Si v es un vértice de un grafo no dirigido, el **grado** *de v es $\delta(v)$ que es el número de aristas que inciden en v exepto los bucles que contribuyen con dos a tal grado.*

Ejemplo



$$\delta(a) = 2, \delta(b) = 4 = \delta(c) = \delta(f), \delta(d) = 1, \delta(d) = 1, \delta(e) = 3, \delta(g) = 0.$$



$$\delta(a) = 4, \delta(b) = 6, \delta(c) = 1, \delta(d) = 5, \delta(e) = 6.$$