Relaciones de Orden. Retículos

Definición

1. *Una relación R sobre el conjunto A se dice de* **orden** *si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva. En tal caso R se escribe como $\leq$ y al par $(A, \leq)$ se le llama* **conjunto (parcialmente) ordenado**.
2. *Si $(A, \leq)$ es conjunto parcialmente ordenado como en el inciso anterior y $a, b \in A$, entonces*

$$
\begin{aligned}
a < b &\Leftrightarrow a \leq b \wedge a \neq b \\
&\Leftrightarrow aRb \wedge a \neq b
\end{aligned}
$$

Ejemplo

La relación S en $\mathbb{R}$ dada por

$$xSy \Leftrightarrow x \leq y$$

es un orden pues

1. reflexiva: $(\forall x \in \mathbb{R})$, xSx pues $x \leq x$
2. antisimétrica: si xSy y ySx entonces $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces $x = y$.
3. transitiva: si xSy y ySz entonces $x \leq y$ y $z \leq z$ luego $x \leq z$.

Ejemplo

Sea E un conjunto. Se define la relación en 2^E por

$$ARB \Leftrightarrow A \subseteq B$$

R es un orden pues:

1. reflexiva: $\forall A \subset E$, $A \subseteq A$
2. antisimétrica: si ARB y BRA entonces $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$ según la definición de igualdad de conjuntos.
3. transitiva: si ARB y BRC entonces $A \subseteq B$ y $B \subset C$ entonces, por porpiedad anterior $A \subseteq C$, i.e., ARC.

Definición

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \backslash \{0\}$$

Ejemplo

En $\mathbb{N}^*$ se define la relación

$$aSb \Leftrightarrow a|b$$

entonces S es un orden:

1. reflexiva: $\forall a \in \mathbb{N}^*$ $a|a$ luego aSa.
2. antisimétrica:

$$\begin{aligned} aSb \wedge bSa &\Rightarrow a|b \wedge b|a \\ &\Rightarrow b \text{ es múltiplo de } a \text{ y } a \text{ lo es de } b \\ &\Rightarrow b = k_1 a \wedge a = k_2 b \text{ para ciertos } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow b = k_1 k_2 b \text{ sustituyendo } a \text{ en la primer ecuación} \\ &\Rightarrow k_1 k_2 = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k_1 = 1 = k_2 \vee k_1 = -1 = k_2$$

si ocurriera lo segundo entonces $a = -b < 0$ lo cual es absurdo pues $a \in \mathbb{N}^*$. Por tanto el segundo caso es imposible. Luego $k_1 = 1 = k_2$ lo que implica $a = b$.

3. transitiva:

$$\begin{aligned} aSb \wedge bSc &\Rightarrow a|b \wedge b|c \\ &\Rightarrow b = k_1 a \wedge c = k_2 b \text{ para ciertos } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \text{ sustituyendo } b \text{ en la segunda ecuación:} c = k_2 k_1 a \\ &\Rightarrow c = k_3 a \text{ con } k_3 = k_2 k_1 \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow a|c \\ &\Rightarrow aSc \end{aligned}$$

Tarea

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son parcialmente ordenados? Demuestre.

1. $(\mathbb{Z}, =)$
2. $(\mathbb{Z}, \geq)$
3. $(\mathbb{Z}, \neq)$
4. $(\mathbb{Z}, \not|)$

Definición

Sea $(A, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado. Se dice que* $(A, \leq)$ *está* **totalmente ordenado** *o* **orden lineal** *si*

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x \leq y \vee y \leq z)$$

Ejemplo

$(\mathbb{R}, \leq)$ es totalmente ordenado.

Ejemplo

$(\mathbb{N}^*, |)$ no es totalmente ordenado pues existen $2, 3 \in \mathbb{N}^*$ tales que

$$2 \not| 3 \text{ y } 3 \not| 2$$

Ejemplo

Si $X = \{a, b, c\}$, entonces $(2^X, \subseteq)$ no es totalmente ordenado pues

$$\{a\} \not\subseteq \{b\} \text{ ni } \{b\} \not\subseteq \{a\}$$

Tarea

Encontrar dos elementos no comparables en

1. $(2^{\{0,1,2\}}, \subseteq)$
2. $(\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}, |)$

Definición

Sea $(A, \leq)$ parcialmente ordenado y $B \subseteq A$. Los siguientes se llaman **elementos notables***:*

1. *Un $k \in A$ se dice* **cota superior** *de B si*
$$(\forall b \in B)(b \leq k)$$
2. *Un $\ell \in A$ se dice* **cota inferior** *de B si*
$$(\forall b \in B)(\ell \leq b)$$
3. *La más pequeña de las cotas superiores M de B se llama* **supremo** *de B:*
$$(\forall k \text{ cota superior de } B)(k \leq M).$$
Se pone
$$M = \sup B$$
Si el supremo M pertenece a B entonces M se llama **máximo** *de B.*

4. La más grande de las cotas inferiores m de B se llama **ínfimo** de B:

$$(\forall \ell \text{ cota inferior de } B)(\ell \leq m).$$

Se pone

$$m = \inf B.$$

Si el ínfimo de B pertenece a B éste se llama **mínimo** de B.

5. Un elemento $c \in A$ se dice **maximal** de A si

$$(\forall a \in A)(c \leq a \Rightarrow c = a)$$

6. Un elemento $c \in A$ se dice **minimal** de A si

$$(\forall a \in A)(a \leq c \Rightarrow c = a)$$

Ejemplo

Sea $E = \{a, b, c\}$. Hallaremos elementos notables de $(2^E, \subseteq)$.
Tenemos que

$$2^E = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

luego tenemos que

$$\varnothing \subseteq \{a\} \subseteq \{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$$

pero también

$$\varnothing \subset \{b\} \subseteq \{b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$$

etcétera. Ponemos toda esta información en un diagrama:(ver Figura).

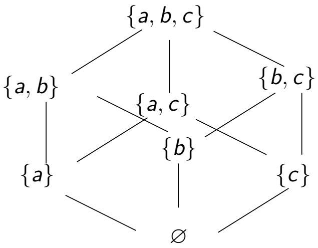

Figura: Diagrama de Hasse de $(2^{\{a,b,c\}}, \subseteq)$

En tal diagrama, una raya de abajo hacia arriba significa $\subseteq$. Luego

- $\{a, b, c\}$ es cota superior de $\{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}\}$
- $\varnothing$ es cota inferior de $\{\{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

De hecho,

- $\{a, b, c\}$ es cota superior de 2^E
- $\varnothing$ es cota inferior de 2^E
- $\{a, b, c\}$ es máximo de 2^E
- $\varnothing$ es mínimo de 2^E

Mientras que

- $\{a\}$ es minimal de la cadena $\{a\} \subseteq \{a, c\} \subseteq \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c\}$ es maximal de la cadena $\{a\} \subseteq \{a, c\} \subseteq \{a, b, c\}$

En un diagrama de Hasse se pone:

$$\begin{tikzcd} y \arrow[d, dash] \\ x \end{tikzcd}$$

para indicar que $x \leq y$; pero se debe de cumplir que

$$\nexists z,\ x \leq z \leq y \text{ con } z \neq x, z \neq y.$$