Una aplicación de digrafos: GooglePage Rank

Idea: desplegar los resultados de búsquedas según su importancia.
Algoritmo de Google:

- Definir la importancia de las páginas web.
- Calcular la importancia de cada página.

Considerar el grafo de internet:

- Vértices: páginas web;
- Aristas: $a \to b$ si hay un hyperlink de a apuntando hacia b y $a \neq b$.

Definición

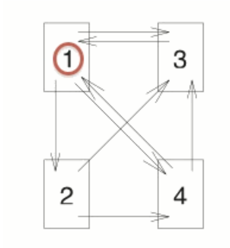
Sea x_k la importancia (no normalizada) del vértice (página) k y L_k el conjunto de vértices que inciden en k. Entonces

$$x_k = \sum_{j \in L_k} \frac{1}{\delta^-(j)} x_j$$

donde $\delta^{-1}(j)$ es el número de aristas que "salen" del vértice j.

Ejemplo

Supongamos que el grafo de internet es:



entonces

$$x_1 = \frac{1}{1}x_3 + \frac{1}{2}x_4, \quad x_2 = \frac{1}{3}x_1$$

En total:

$$\begin{array}{rcllllll}
x_1 & = & & & & \frac{1}{1}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 \\
x_2 & = & \frac{1}{3}x_1 & & & & & \\
x_3 & = & \frac{1}{3}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & & + & \frac{1}{2}x_4 \\
x_4 & = & \frac{1}{3}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & & &
\end{array}$$

Ejemplo

i.e.,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Se tiene un sistema de ecuaciones del tipo

$$\lambda X = AX$$

en tal caso, el vector X se llama *eigenvector* del *eigenvalor* λ.

Despejando

$$(A - \lambda I)X = 0$$

donde I es matriz identidad. En nuestro ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & -1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y por Gauss-Jordan:

$$x_1 = 2r, x_2 = \frac{2}{3}r, x_3 = \frac{3}{2}r, x_4 = r$$

con $r \in \mathbb{R}$ variable libre.

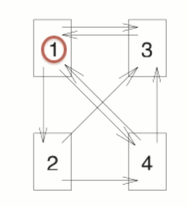
Definición

La importancia normalizada x'_k del vertice k es

$$x'_k = \frac{x_k}{\sum_j x_j}$$

Por ejemplo, las importancias normalizadas, en nuestro ejemplo, son:

- $x'_1 = \frac{x_1}{x_1+x_2+x_3+x_4} = \frac{2r}{2r+(2/3)r+(3/2)r+r} = 12/31 \approx .3870967741935484$
- $x'_2 = \frac{x_2}{x_1+x_2+x_3+x_4} = 4/31 \approx .1290322580645161$
- $x'_3 = \frac{x_3}{x_1+x_2+x_3+x_4} = 9/31 \approx .2903225806451613$
- $x'_4 = \frac{x_4}{x_1+x_2+x_3+x_4} = 6/31 \approx .1935483870967742$



Por lo tanto, los vértices ordenados según su importancia (normalizada) son:

- 1
- 3
- 4
- 2

En particular, el vértice más importante es 1.
Aclaración: Google no usa el método de Gauss-Jordan, sino el *método de la potencia* que se basa en el teorema de Perron-Frobenius.