Propiedad

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A, entonces las clases de equivalencia constituyen una partición de A. Esto es:

1. $\bigcup_{a\in A}[a] = A$
2. *si* $[a] \neq [b]$ *entonces* $[a] \cap [b] = \varnothing$.

Dem.

1. Por contenciones:
   - $\subseteq$: Como cada clase se forma con conjunto universal A, tenemos que $(\forall a \in A)\,[a] \subseteq A$, luego

$$\bigcup_{a\in A}[a] \subseteq A.$$

$\supseteq$: si $z \in A$ entonces zRz por reflexiva, luego $z \in [z]$ por lo que

$$z \in \bigcup_{a \in A} [a]$$

$$\therefore A \subseteq \bigcup_{a \in A} [a]$$

$$\therefore \bigcup_{a \in A} [a] = A$$

2. Por contrarrecíproca, tal propiedad es equivalente a

$$[a] \cap [b] \neq \varnothing \Rightarrow [a] = [b]$$

demostraremos ésta.
Si $[a] \cap [b] \neq \varnothing$ entonces $\exists z \in [a] \cap [b]$, esto es $z \in [a]$ y $z \in [b]$; por lo que zRa y zRb. Luego por simétrica aRz y zRb y entonces, por transitiva aRb lo que implica $[a] = [b]$.

Ejemplo

Consideremos la relación de equivalencia llamada congruencia módulo 4 sobre $\mathbb{Z}$. Entonces

$$\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3]$$

y

$$\begin{aligned} [0] \cap [1] &= \varnothing & \qquad [1] \cap [2] &= \varnothing \\ [0] \cap [2] &= \varnothing & \qquad [1] \cap [3] &= \varnothing \\ [0] \cap [3] &= \varnothing & \qquad [2] \cap [3] &= \varnothing \end{aligned}$$

Definición

Si R es una relación de equivalencia sobre A entonces

$$A/R = \{[a] \mid a \in A\}$$

se llama **conjunto cociente**.

Ejemplo

En el ejemplo inmediato anterior,

$$\mathbb{Z}/\equiv = \{[0], [1], [2], [3]\}$$

Ejemplo

Si consideramos ahora la congruencia módulo 2 en los enteros obtenemos

$$\mathbb{Z}/\equiv = \{[0],[1]\}$$

donde $[1]$ *es el conjunto de enteros impares y* $[0]$ *es el conjunto de enteros pares.*

Ejemplo

Sea la relación en $A = \{1,2,3,4\}$:

$$S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(3,4),(4,3)\}$$

S es una relación de equivalencia. Entonces el conjunto cociente está formado por

$$[1] = \{1\}, \quad [2] = \{2\}, \quad [3] = \{3\}, \quad [3] = 3,4 = [4]$$

luego,

$$A/S = \{[1],[2],[3]\} = \{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$$

Ejemplo

Sea $X = \{a, b, c\}$. Definimos una relación de equivalencia en el conjunto potencia 2^X mediante $(A, B \in 2^X)$:

$$ARB \Leftrightarrow A \cap \{a, c\} = B \cap \{a, c\}.$$

Evidentemente R es de equivalencia. Calculemos el conjunto cociente $2^X/R$. Primero recordemos que

$$2^X = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

entonces, por defininción de clase

$$\begin{aligned} [\varnothing] &= \{A \subseteq X \mid A \cap \{a, c\} = \underbrace{\varnothing \cap \{a, c\}}_{\varnothing}\} \\ &= \{A \subseteq X \mid A \cap \{a, c\} = \varnothing\} \\ &= \{\varnothing, \{b\}\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[\{a\}] &= \{A \subseteq X \mid A \cap \{a,c\} = \underbrace{\{a\} \cap \{a,c\}}_{\{a\}}\} \\
&= \{A \subseteq X \mid A \cap \{a,c\} = \{a\}\} \\
&= \{\{a\}, \{a,b\}\}
\end{aligned}
$$

$$[\{b\}] = [\{a\}]$$

pues $\{b\}R\{a\}$;

$$
\begin{aligned}
[\{c\}] &= \{A \subseteq X \mid A \cap \{a,c\} = \{c\}\} \\
&= \{\{c\}, \{b,c\}\}
\end{aligned}
$$

$$[\{a,b\}] = [\{a\}]$$

pues $\{a,b\}R\{a\}$.

$$
\begin{aligned}
[\{a,c\}] &= \{A \subseteq X \mid A \cap \{a,c\} = \{a,c\}\} \\
&\{\{a,c\}, \{a,b,c\}\}.
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$[\{b,c\}] = [\{c\}] \text{ y } [\{a,b,c\}] = [\{a,c\}]$$

pues $\{b,c\}R\{c\}$ y $\{a,b,c\}R\{a,c\}$. Por tanto, el conjunto cociente es

$$2^X/R = \{[\varnothing],[\{a\}],[\{c\}],[\{a,c\}]\}$$

Definición

Sea $\equiv$ la relación de congruencia módulo n. El conjunto de **enteros módulo n** *se denota con $\mathbb{Z}_n$ o $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ y este es el cociente $\mathbb{Z}/\equiv$,*

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/\equiv = \{[0], [1], [2], \dots, [n]\}$$

Definición

Una partición de un conjunto B es una familia A_i, $i \in I$ de subconjuntos de B tales que

1. $B = \bigcup_{i \in I} A_i$
2. $(\forall i \in I)(\forall j \in I)(B_i \cap B_j \neq \varnothing \Rightarrow B_i = B_j)$

Sabemos que una relación de equivalencia induce una partición, siendo la familia de tal partición las clases de equivalencia. Reciprocamente: una partición induce una relación de equivalencia.

Propiedad

Si A_i, $i \in I$, forman una partición de un conjunto B entonces esta induce una relación de equivalencia:

$$aRb \Leftrightarrow \exists i \in I \text{ tal que } a \in A_i \wedge b \in A_i$$

Dem.

Probaremos que R es relación de equivalencia:

1. Reflexiva: si $a \in B$ entonces $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$, luego existe $j \in I$ tal que $a \in A_j$. Así $a \in A_j$ y $a \in A_j$, luego aRa.
2. Simétrica: si aRb entonces existe $i \in I$ tal que $a \in A_i$ y $b \in A_i$; luego $b \in A_i$ y $a \in A_i$ entonces bRa.
3. Transitiva: si aRb y bRc entonces existe $i \in I$ tal que $a, b \in A_i$ y existe $j \in I$ tal que $b, c \in A_j$. Luego $b \in A_i \cap A_j$, esto es $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ lo que implica $A_i = A_j$. Entonces $a \in A_i$ y también $c \in A_i$. Por lo tanto aRc.

$\square$

Ejemplo

La población de la ciudad de Puebla está dividida por colonias; luego la siguiente es una relación de equivalencia entre la población de Puebla:

$$aRb \Leftrightarrow a \text{ y } b \text{ vivien en la misma colonia}$$

y la ciudad queda dividida en clases:

$$P = \underbrace{[\text{José Doger}]}_{\text{Bosques de la Calera}} \cup \underbrace{[\text{ yo }]}_{\text{La Vista}} \cup \underbrace{[\text{E. Aguera}]}_{\text{Valsequillo}} \cup \ldots$$

Ejemplo

Sea $B = \{a, b, c, d, e\}$. Una partición de B viene dada por

$$B = \underbrace{\{a\}}_{A_1} \cup \underbrace{\{b, c\}}_{A_2} \cup \underbrace{\{d, e\}}_{A_3}$$

Luego una relación de equivalencia en A es

$$xSy \Leftrightarrow \text{existe } i \text{ con } 1 \leq i \leq 3 \text{ tal que } x \in A_i \text{ y } y \in A_i$$

luego $[a] = \{a\}$, $[b] = \{b, c\}$ y $[d] = \{d, e\}$ y el conjunto cociente es

$$A/S = \{ \underbrace{[a]}_{A_1}, \underbrace{[b]}_{A_2}, \underbrace{[d]}_{A_3} \}$$

Ejemplo

En $\mathbb{Z}_6$ (la relación es $x \equiv y \pmod 6 \Leftrightarrow x - y$ es múltiplo de 6con $x, y \in \mathbb{Z}$) tenemos que

$$\mathbb{Z}_6 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$$

y las clases forman una partición de $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4] \cup [5]$$