Las representaciones matriciales pueden ayudarnos a identificar las propiedades de las relaciones.

Propiedad

Sea R una relación sobre el conjunto A. Entonces R es reflexiva si y sólo si la matriz M_R tiene sólo 1's en su diagonal principal.

Dem.

Sean $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $M_R = (\alpha_{i,j})$. Recordemos que R es reflexiva ssi $a_i R a_i$ para $i = 1, \ldots, n$, i.e, si y sólo si $\alpha_{i,i} = 1$, $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Propiedad

Sea R una relación sobre el conjunto A. Entonces R es simétrica si y sólo si M_R es una matriz simétrica.

Dem.

Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $M_R = (\alpha_{i,j})$. Nótese que R es simétrica si sólo si $a_i R a_j \Leftrightarrow a_j R a_i$, para $i, j = 1, \ldots, n$, esto es, R es simétrica si y sólo si $\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}$ para $i, j = 1, \ldots, n$ lo cual es equivalente a $M_R = M_R^t$ donde el superíndice t indica transposición. $\square$

Propiedad

Sea R una relación sobre el conjunto A. Entonces R es antisimétrica si y sólo si la matriz $M_R = (\alpha_{i,j})$ cumple que: para $i \neq j$ ocurre que $\alpha_{i,j} = 0$ ó $\alpha_{j,i} = 0$.

Dem.

Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Tenemos que R es antisimétrica si y sólo si

$$a_i R a_j \text{ y } a_j R a_1 \Rightarrow a_i = a_j$$

que es equivalente a su contrarecíproca:

$$a_i \neq a_j \Rightarrow a_i \not R a_j \text{ ó } a_j \not R a_i$$

que a su vez indica

$$i \neq j \Rightarrow \alpha_{i,j} = 0 \text{ ó } \alpha_{j,i} = 0.$$

$\square$

Definición

Sea $A \neq \varnothing$. Una relación R sobre A se dice que es de **equivalencia** *si es reflexiva, simétrica y transitiva.*

Ejemplo

Sea R la relación en $\mathbb{Z}$ dada por

$$aRb \Leftrightarrow a = b \vee a = -b.$$

Demostrar que es de equivalencia.

Dem.

1. R es reflexiva: $\forall a \in \mathbb{Z}$, aRa pues $a = a$.
2. R es simétrica: si aRb entonces $a = b$ o $a = -b$, luego $b = a$ o $b = -a$ lo que implica bRa.
3. R transitiva: si aRb y bRc entonces $(a = b$ o $a = -b)$ y $(b = c$ o $b = -c)$ lo que implica $|a| = |b|$ y $|b| = |c|$ entonces $|a| = |c|$ de donde se sigue que $a = c$ o $a = -c$ por lo que aRc.

Ejemplo

Sea R la relación de equivalencia en $\mathbb{Q}$ (conjunto de números racionales) dada por

$$aRb \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}.$$

(ejemplos de parejas relacionadas son: $(1/2)R(1/2)$ pues $1/2 - 1/2 \in \mathbb{Z}$, $(3/2)R(1/2)$ pues $3/2 - 1/2 = 1 \in \mathbb{Z}$, $(1/2)R(3/2)$ pues $1/2 - 3/2 = -1 \in \mathbb{Z}$, etc.) Demostrar que R es de equivalencia.

Dem.

1. R es reflexiva: $\forall a \in \mathbb{Q}$, $a - a = 0$ luego aRa.
2. R es simétrica: $\forall a \in \mathbb{Q}$, $\forall b \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} aRb &\Rightarrow a - b \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \underbrace{-(a-b)}_{b-a} \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow b - a \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow bRa \end{aligned}$$

3. R es transitiva: $\forall a \in \mathbb{Q}$, $\forall b \in \mathbb{Q}$

$$
\begin{aligned}
aRb \wedge bRc \Rightarrow {} & a - b \in \mathbb{Z} \wedge b - c \in \mathbb{Z} \Rightarrow \\
& \underbrace{(a-b)+(b-c)}_{a-c} \in \mathbb{Z}, \qquad \text{pues suma de enteros es entero} \\
& \Rightarrow a - c \in \mathbb{Z} \\
& \Rightarrow aRc.
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Se define la siguiente relación en $\mathbb{Z}$:

$$a|b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } b = ka$$

El símbolo "$|$" se lee "divide". Esto es

$$a \text{ divide a } b \Leftrightarrow b \text{ es múltiplo de } a$$

Por ejemplo:

1. $3|6$ pues existe $2 \in \mathbb{Z}$ tal que $6 = 2 * 3$;
2. $7|21$ pues $\exists 3 \in \mathbb{Z}$ tal que $21 = 3 * 7$;
3. $5| - 50$ pues $\exists - 10 \in \mathbb{Z}, -50 = (-10) * 5$;
4. $37|0$ pues $\exists 0 \in \mathbb{Z}, 0 = 0 * 37$;
5. $3 \not| 4$ pues no existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $4 = k * 3$. De hecho tal k tiene que ser $k = 4/3 \notin \mathbb{Z}$.
6. $0|0$ pues $\exists 1 \in \mathbb{Z}$ tal que $0 = 1 * 0$.

Como puede notarse, la relación de divisibilidad no es de equivalencia pues no es simétrica: $3|6$ pero $6 \not| 3$. Sin embargo es reflexiva y transitiva:

1. reflexiva: $\forall a \in \mathbb{Z}$: como $a = 1 * a$ entonces $a|a$;
2. transitiva: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} a|b \wedge b|c &\Rightarrow (\exists k_1 \in \mathbb{Z}, b = k_1 a) \wedge (\exists k_2 \in \mathbb{Z}, c = k_2 b) \\ &\Rightarrow c = k_2(k_1 a), \text{sustituyendo } b; \\ &\Rightarrow c = (k_2 k_1)a, \text{asociando con } k_2 k_1 \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow c \text{ es múltiplo de } a \\ &\Rightarrow a|c \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ “}|\text{” no es relación de equivalencia}$$

Ejemplo

Se define la relación en $\mathbb{Z}$:

$$a \equiv b \Leftrightarrow 4|(a-b)$$

(por ejemplo $32 \equiv 8$ pues $4|(32-8) = 24$, $7 \equiv 3$ pues $4|(7-3) = 4$, $4 \equiv 0$ pues $4|(4-0)$, $4 \not\equiv 1$ pues $4 \not|(4-1) = 3$).
¿Es $\equiv$ relación de equivalencia?

Solución. Si:

1. reflexiva: $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a \equiv a$ pues $4|(a-a) = 0$.
2. simétrica:

$$\begin{aligned}
a \equiv b &\Rightarrow 4|(a-b) \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, a-b = 4k \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, -(a-b) = -4k \quad \text{multiplicando por } -1 \\
&\Rightarrow \exists -k \in \mathbb{Z}, b-a = 4(-k) \\
&\Rightarrow 4|(b-a) \\
&\Rightarrow b \equiv a
\end{aligned}$$

3. transitiva:

$$
\begin{aligned}
a \equiv b \wedge b \equiv c &\Rightarrow 4|(a-b) \wedge 4|(b-c) \\
&\Rightarrow a-b \text{ es múltiplo de 4 y } b-a \text{ es múltiplo de 4} \\
&\Rightarrow \underbrace{(a-b)+(b-c)}_{a-c} \text{ es múltiplo de 4}
\end{aligned}
$$

pues suma de múltiplos de 4 resulta en un múltiplo de 4.

Tarea

¿Cuáles de las siguientes relaciones en $\{0,1,2,3\}$ son de equivalencia? ¿Qué propiedades faltan para que lo sean?

1. $\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$
2. $\{(0,0),(0,2),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$
3. $\{(0,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$
4. $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,3)\}$

Tarea

Lo mismo que el anterior para las siguientes relaciones entre el conjunto de personas.

1. $\{(a,b) \mid a \text{ y } b \text{ tienen la misma edad}\}$
2. $aRb \Leftrightarrow$ *a y b tienen los mismos padres.*
3. $aRb \Leftrightarrow$ *a y b tienen un padre en común.*
4. $aRb \Leftrightarrow$ *a y b hablan un mismo idioma.*