Definición

Una relación R sobre un conjunto A es una relación de A en A. En tal caso, si $(a, b) \in R$ entonces se escribe aRb. Esto es:

$$aRb \Leftrightarrow (a, b) \in R.$$

Si $(a, b) \notin R$ se escribe $a \not R b$.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Se define una relación en A mediante

$$xRy \Leftrightarrow y = 2x$$

entonces $1R2$ pues $2 = 2 * 1$ y $2R4$ pues $4 = 2 * 2$:

$$R = \{(1, 2), (2, 4)\}$$

Ejemplo

Sea S la siguiente relación en $\mathbb{N}$:

$$aSb \Leftrightarrow a \leq b$$

así $(1, 2) \in S$ pues $1 \leq 2$, $(2, 3) \in S$, $(2, 40) \in S$ pero $(40, 2) \notin S$.

Ejemplo

$\varnothing$ es una relación sobre cualquier conjunto.

Tarea

Enumerar los pares ordenados de la relación R de $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *en* $B = \{0, 1, 2, 3\}$ *donde aRb si y sólo*

1. $a = b$
2. $a + b = 4$
3. $a > b$
4. *el máximo común divisor entre a y b es 1*

Representar tales relaciones mediante su diagrama cartesiano.

Tarea

Escribir por extensión los pares ordenados de la relación R sobre $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*:*

$$aRb \Leftrightarrow \text{ a divide a b}$$

Operaciones

Como las relaciones son conjuntos, éstas se pueden combinar según las operaciones de conjuntos.

Ejemplo

Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Consideremos las relaciones de A en B dadas por

$$R_1 = \{(1, 1), (, 2, 2), (3, 3)\}, \quad R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
R_1 \cup R_2 &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}, \\
R_1 \cap R_2 &= \{(1, 1)\} \\
R_1 - R_2 &= \{(2, 2), (3, 3)\} \\
R_2 - R1 &= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}
\end{aligned}$$

Ejemplo

Sea A el conjunto de conjunto de todos los estudiantes y B el conjunto de todos os cursos en una escuela. Definimos relaciones $R_1, R_2 : A \to B$ como

$$aR_1b \text{ si y sólo si } a \text{ ha tomado el curso } b;$$

$$aR_2b \text{ si y sólo si } a \text{ requiere del curso } b \text{ para graduarse.}$$

Entonces

1. $(a, b) \in R_1 \cup R_2$ ssi a ha tomado el curso b o requiere del curso b para graduarse;
2. $(a, b) \in R_1 \cap R_2$ ssi a ha tomado el curso b y requiere de b para graduarse;
3. $a(R_1 - R_2)b$ ssi a ha tomado el curso b y no requiere de b para graduarse;
4. $a(R_2 - R1)b$ ssi a require de b para graduarse y no la ha tomado.

Ejemplo

Sea $A = \mathbb{R}$. Definimos las siguientes relaciones de A en A:

$$xR_1y \text{ ssi } x < y,$$

$$xR_2y \text{ ssi } x > y.$$

Describir $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 - R_2$ y $R_2 - R_1$.

Sol.

1. $(x, y) \in R_1 \cup R_2$ ssi $(x, y) \in R_1$ o $(x, y) \in R_2$, esto es, $x < y$ o $x > y$ lo cual es equivalente a $x \neq y$. Por lo tanto
$$x(R_1 \cup R_2)y \text{ ssi } x \neq y.$$
2. $(x, y) \in R_1 \cap R_2$ ssi $(x, y) \in R_1$ y $(x, y) \in R_2$, i.e., $x < y$ y $x > y$, lo cual es imposible. Por lo tanto
$$R_1 \cap R_2 = \varnothing.$$
3. $(x, y) \in R_1 - R_2$ ssi $(x, y) \in R_1$ y $(x, y) \notin R_2$, esto es $x < y$ y $x \not> y$, i.e., $x < y$ y $x \leq y$ lo cual es equivalente a $x < y$ lo que indica $(x, y) \in R_1$. Por lo tanto
$$R_1 - R_2 = R_1$$
4. $R_2 - R_1 = R_2$.

Una operación entre relaciones, que no aparece como una operación estándar en conjuntos, es la *composición*.

Definición

Sean $R : A \to B$, $S : B \to C$ *relaciones. Se define la* **relación composición** *como la relación* $S \circ R$,

$$aS \circ Rc \Leftrightarrow \exists b \in B \text{ tal que } aRb \wedge bSc.$$

Ejemplo

Sean

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{a, b, c\}, \quad C = \{\alpha, \beta, \delta, \gamma\}$$

y relaciones

$$R : A \to B, \quad S : B \to C.$$

definidas por

$$R = \{(1, a), (1, b), (3, c)\}, \quad S = \{(a, \alpha), (a, \delta), (b, \alpha), (c, \gamma)\}.$$

Entonces

$$S \circ R = \{(1, \delta), (1, \alpha), (3, \gamma)\}$$

pues

- $(1, \delta) \in S \circ R$ pues $\exists a \in B$ tal que $1Ra$ y $aS\delta$;
- $(1, \alpha) \in S \circ R$ porque $\exists a \in B$ con $1Ra$ y $aS\alpha$;
- $(3, \gamma) \in S \circ R$ pues $\exists c \in B$ tal que $3Rc$ y $cS\gamma$.