Definición

Sea $f : A \to B$ función.

1. *f se dice* **inyectiva** *si* $(\forall x \in A)(\forall y \in B)(x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$.
2. *f se dice* **suprayectiva** *si $f(A) = B$, es decir si*

$$(\forall b \in B)(\exists x \in A)(f(x) = b)$$

3. *f es biyectiva si es inyectiva y suprayectiva.*

Notemos que

$$f \text{ es inyectiva } \Leftrightarrow (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$$

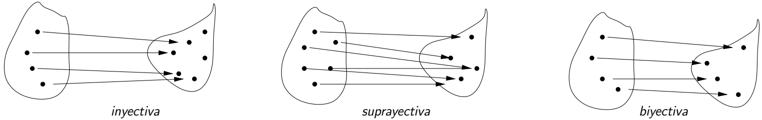


Figura: Algunos tipos de funciones

Ejemplo

¿Qué tipo de funciones son las siguientes?

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
2. $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$
3. $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$
4. $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = 2n$.

Sol.
1. No es inyectiva pues $f(-1) = 1 = f(1)$ y $-1 \neq 1$. Tampoco es sobre pues $\exists -1 \in \mathbb{R}$ que hace la ecuación

$$\underbrace{f(x)}_{x^2} = -1$$

imposible de resolver para $x \in \mathbb{R}$.

2. Como en el ejemplo anterior f no es inyectiva, pero ahora f sí es sobre. Pues $\forall b \in [0, \infty)$, i.e., $b \geq 0$ tenemos que existe $x = \sqrt{b}$ que es solución de $f(x) = b$.
3. f es inyectiva: $\forall x \geq 0$, $\forall y \geq 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 &= y^2 \\ \Rightarrow \sqrt{x^2} &= \sqrt{y^2} \\ |x| &= |y|, \text{ pues, en general } \sqrt{x^2} = |x|, \\ x &= y, \text{ pues } x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

f es sobre: Sea $b \in [0, \infty)$ entonces $\exists x = \sqrt{b}$ tal que resuelve la ecuación

$$\underbrace{f(x)}_{(\sqrt{b})^2} = b$$

Por lo tanto f es biyectiva.

4. g es inyectiva: $\forall x \in \mathbb{N}$, $\forall y \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} g(x) = g(y) \Rightarrow 2x &= 2y \\ x &= y \text{ multiplicando por } 1/2; \end{aligned}$$

g no es sobre: pues para $b = 1 \in \mathbb{N}$ la ecuación

$$\underbrace{g(x)}_{2x} = 1$$

es imposible de resolver en $x \in \mathbb{N}$: su solución es $x = 1/2 \notin \mathbb{N}$.

Ejemplo

Sea

$$f : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3\}$$

definida por $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$, $f(d) = 3$. ¿Es f suprayectiva?

Sol.

Tenemos que $Im\, f = \{1, 2, 3\}$. Luego f es sobreyectiva.

$\square$

Ejemplo

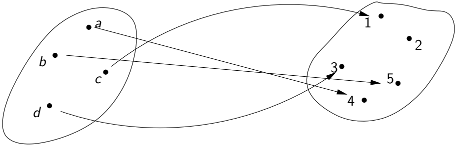
Determinar si la función

$$f : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

con $f(a) = 4,\ f(b) = 5,\ f(c) = 1,\ f(d) = 3$ es inyectiva.

Sol.

El diagrama sagital de f es



de donde se puede ver a f toma diferentes valores en diferentes elementos. Por lo tanto, f es inyectiva. $\square$

Ejemplo

Determinar si la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ es inyectiva, ¿es biyectiva?

Sol.

- Inyectiva:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow 3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \\ &\Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \text{ sumando -2} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ multiplicando por } 1/3 \end{aligned}$$

- Suprayectiva: sea $b \in \mathbb{R}$. Tratamos de resolver la ecuación $f(x) = b$, es decir, $3x + 2 = b$ cuya solución es $x = \frac{b-2}{3}$, esto es,

$$f\left(\frac{b-2}{3}\right) = b$$

por lo tanto f es sobre.

$$\therefore f \text{ es biyectiva.}$$

Teorema

Sean $R : A \to B$, $S : B \to C$, $T : C \to D$ relaciones. Entonces

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R.$$

Demostración.

Tenemos que

$$S \circ R : A \to C, \quad T \circ S : B \to D.$$

Demostraremos que

1. $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$
2. $(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$

1. Sea $(a, d) \in T \circ (S \circ R)$ entonces existe $c \in C$ tal que

$$a\, S \circ R\, c \text{ y } cTd$$

en particular $(a, c) \in S \circ R$, luego existe $b \in B$ tal que

$$aRb \text{ y } bSc.$$

Tenemos bSc y cTd, luego $(b, d) \in T \circ S$; pero también $(a, b) \in R$ y $(b, d) \in T \circ S$, lo que implica

$$a \in (T \circ S) \circ R$$

2. Tarea.

Como consecuencia tenemos la propiedad de asociatividad para la composición de funciones:

Corolario

Si $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ *son funciones, entonces*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Definición

Sea R una relación del conjunto A al conjunto B. Se define la relacion inversa R^{-1} de B en A como

$$bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb.$$

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$ y R relación de A en B, $R = \{(1, a), (1, b), (3, c), (4, c)\}$. Entonces

$$R^{-1} = \{(a, 1), (b, 1), (c, 3), (c, 4)\}.$$

El siguiente teorema da la relación entre el concepto de función biyectiva y el concepto de función inversa.

Teorema

Sea $f : A \to B$ una función. Entonces

$$f^{-1} : B \to A \text{ es función } \Leftrightarrow f \text{ es biyectiva.}$$

Demostración.

(⇒) Supongamos que $f^{-1} : B \to A$ es función. Demostraremos que f es biyectiva.

1. f es inyectiva: supongamos que $f(x) = f(y)$. Por demostrar que $x = y$. Tenemos que $(x, f(x)) \in f$ y $(y, \underbrace{f(y)}_{=f(x)}) \in f$. Luego, por definición de relación inversa,
$$(f(x), x) \in f^{-1} \text{ y } (f(x), y) \in f^{-1}$$
de donde, como f es función, se obtiene que $x = y$.
2. f es sobre: sea $b \in B$. Por demostrar que existe $x \in A$ tal que
$$f(x) = b.$$
Como f^{-1} es función, $(b, f^{-1}(b)) \in f^{-1}$. Luego, por definición de relación inversa, $(f^{-1}(b), b) \in f$. Definimos $x = f^{-1}(b)$. Luego, por definición de imagen $(x, f(x)) \in f$, pero también tenemos que $(x, b) \in f$. Luego $f(x) = b$.

$$\therefore f \text{ es biyectiva.}$$

($\Leftarrow$) Supongamos que f es biyectiva. Por demostrar que $f^{-1}: B \to A$ es función.

1. $Dom\, f^{-1} = B$: tenemos que, por definición de dominio, $Dom\, f^{-1} \subseteq B$. Recíprocamente: sea $b \in B$, como f es suprayectiva existe $x \in A$ tal que $f(x) = b$, esto es $xfb \in f$; se sigue que $bf^{-1}x$, lo que implica $b \in Dom\, f^{-1}$, por definición de dominio:
$$\therefore B \subseteq Dom\, f.$$
$$\therefore Dom\, f = B.$$
2. Supongamos que $(a,b) \in f^{-1}$ y $(a,c) \in f^{-1}$. Por demostrar que $b = c$. Por definición de relación inversa, tenemos que $(b,a) \in f$ y $(c,a) \in f$, esto es, $f(b) = a$ y $f(c) = a$ por lo que $f(b) = f(c)$; ahora usamos la definición de función inyectiva para obtener que $b = c$ como queríamos.

Tarea

En cada inciso dar un ejemplo de una función $f : A \to B$ tal que

1. *sea inyectiva pero no sobre;*
2. *sobre pero no inyectiva;*
3. *inyectiva y sobre;*
4. *ni inyectiva ni sobre.*

Tarea

Determinar si las siguientes reglas de correspondencia definen funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ inyectivas.

1. $f(n) = n - 1$
2. $f(n) = n^3$
3. $f(n) = n^2 + 1$

Tarea

¿Cuáles de los incisos del ejercicio anterior definen funciones suprayectivas?

Tarea

Determinar si las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son biyectivas.

1. $f(x) = -3x + 4$
2. $f(x) = 3x^2 + 7$
3. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$
4. $f(x) = x^3 + 1$