

Definición

Un conjunto (A, \leq) se llama **retículo** si

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\text{ existen } \sup\{x, y\} \text{ e } \inf\{x, y\})$$

Ejemplo

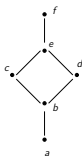
(\mathbb{R}, \leq) es un retículo, pues si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces, por tricotomía $x \leq y$ o $y \leq x$:

- ▶ Caso $x \leq y$: $\sup\{x, y\} = y$ y $\inf\{x, y\} = x$.
- ▶ Caso $y \leq x$: $\sup\{x, y\} = x$ y $\inf\{x, y\} = y$.

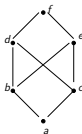
Ejemplo

Considérese los siguientes diagramas de Hasse:

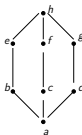
1.



2.



3.



que representan ordenes parciales. Determinar si son retículos.

Sol. Tenemos que mostrar que cada pareja tiene supremo e ínfimo. Pondremos tal información en una tabla. Como

$\sup\{x, y\} = \sup\{y, x\}$ sólo llenaremos la mitad de tal tabla.

1. Nótese que $\sup\{a, b\} = b$ pues b, c, d, e, f son cotas superiores y la menor de éstas es b . Similarmente $\sup\{b, e\} = f$:

<i>sup</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
<i>b</i>		<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
<i>c</i>			<i>c</i>	<i>e</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
<i>d</i>				<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
<i>e</i>					<i>e</i>	<i>f</i>
<i>f</i>						<i>f</i>

inf		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
<i>a</i>		<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>b</i>			<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>
<i>c</i>				<i>c</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>
<i>d</i>					<i>d</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
<i>e</i>						<i>e</i>	<i>e</i>
<i>f</i>							<i>f</i>

Por lo tanto tenemos un retículo.

2. Las cotas superiores de $\{b, c\}$ son: d, e, f y de éstas, para calcular el supremo, debemos tomar la menor, pero d y e no son comparables. Por lo tanto no existe supremo de $\{b, c\}$. Luego no tenemos un retículo.

3.

sup	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
<i>b</i>		<i>b</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>e</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>
<i>c</i>			<i>c</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>f</i>	<i>h</i>	<i>h</i>
<i>d</i>				<i>d</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
<i>e</i>					<i>e</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>
<i>f</i>						<i>f</i>	<i>h</i>	<i>h</i>
<i>g</i>							<i>g</i>	<i>h</i>
<i>h</i>								<i>h</i>

Nótese que las cotas superiores de $\{b, c\}$ son: h . Luego $\sup\{b, c\} = h$.

<i>inf</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>b</i>		<i>b</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>c</i>			<i>c</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>c</i>
<i>d</i>				<i>d</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>a</i>
<i>e</i>					<i>e</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>f</i>						<i>f</i>	<i>a</i>	<i>f</i>
<i>g</i>							<i>g</i>	<i>g</i>
<i>h</i>								<i>h</i>

Por lo tanto tenemos un retículo.

Ejemplo

Sea E un conjunto. Determinar si $(2^E, \subseteq)$ es un retículo.

Sol.

Sean $A, B \in 2^E$. Entonces $A \subseteq E$ y $B \subseteq E$. Probaremos que

1. $\sup\{A, B\} = A \cup B$
2. $\inf\{A, B\} = A \cap B$

1. Sabemos que $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$, esto es, $A \cup B$ es cota superior del conjunto $\{A, B\}$; probaremos que esta es la mínima cota superior. Supongamos que C es cota superior de $\{A, B\}$. Luego, $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$, entonces $A \cup B \subseteq C$.

$$\therefore \sup\{A, B\} = A \cup B.$$

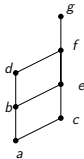
2. Tarea.

Por lo tanto $(2^E, \subseteq)$ es un retículo. □

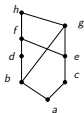
Tarea

Determinar si los conjuntos parcialmente ordenados con estos diagramas de Hasse son o no retículos.

1.



2.



3.

