Producto cartesiano y relaciones

Definición

Sean A, B conjuntos.

1. *Si $a \in A$ y $b \in B$ entonces (a, b) se dice* **par ordenado**.
2. *Se pone $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.*
3. *Se define el* **producto cartesiano** *de A con B como*

$$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo

1. $(1, 2) \neq (2, 1)$
2. $\{1, 2\} = \{2, 1\}$

$\left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pues

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Ejemplo

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$. *Entonces*

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$$

que se puede representar graficamente por un diagrama cartesiano:

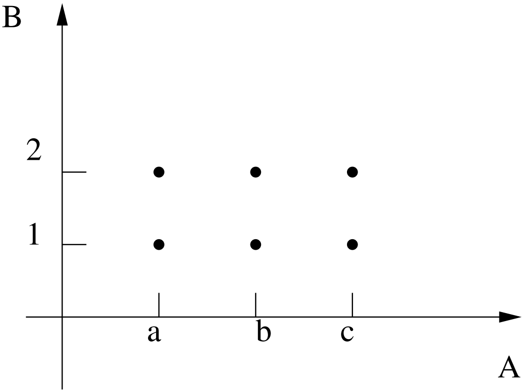

Figura: Diagrama cartesiano

Propiedad

Sean A, B, C conjuntos.

1. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
2. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

Dem.

1.

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \times C &\Leftrightarrow x = (r, s) \wedge r \in A \cup B \wedge s \in C \\
&\Leftrightarrow x = (r, s) \wedge (r \in A \vee r \in B) \wedge s \in C \\
&\Leftrightarrow x = (r, s) \wedge ((r \in A \wedge s \in C) \vee (r \in B \wedge s \in C) \\
&\Leftrightarrow (x = (r, s) \wedge (r \in A \wedge s \in C)) \vee (x = (r, s) \wedge r \\
&\Leftrightarrow x \in A \times C \vee x \in B \times C \\
&\Leftrightarrow x \in (A \times C) \cup (B \times C)
\end{aligned}
$$

2. Tarea.

Definición

Sean A, B *conjuntos. Si* $f \subseteq A \times B$ *entonces* f *se llama* **relación** *o* **correspondencia** *entre* A *y* B. *En tal caso* f *se denota como*

$$f : A \to B$$

Definición

Si $f : A \to B$ *es relación y* $(a,b) \in f$ *entonces*

1. b *se llama* **imagen** *de* a
2. a *se llama* **anti-imagen** *o* **preimagen** *de* b
3. *si* $a \in A$ *arbitrario el* **conjunto de im'agenes** *de* a *es*

$$f(a) = \{b \in B \,|\, (a,b) \in f\}$$

4. *si* $b \in B$ *arbitrario, el conjunto de pre-imágenes de* b *es*

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \,|\, (a,b) \in f\}$$

5. *El* **dominio** *de* f *es*

$$Dom\, f = \{a \in A \,|\, \text{existe } b \in B \text{ con } (a,b) \in f\}$$

6. *El* **rango, recorrido, imagen** *de* f *es*

$$Im\, f = \{b \in B \,|\, \text{existe } a \in A \text{ con } (a,b) \in f\}$$

Ejemplo

Sea A el conjunto de nombres de las ciudades, B el conjunto de nombres de países. Se define una relación entre A y B como

$$f = \{(a, b) \mid a \text{ está en } b\}$$

Entonces, (Rosario,Argentina)$\in f$, (Barranquilla,Colombia)$\in f$, (Paris, Francia)$\in f$, (Paris,Hilton)$\notin f$, (Mérida,México)$\in f$, (Córdoba,Argentina)$\in f$, (Córdoba,México)$\in f$, (Córdoba,España)$\in f$;

- f^{-1}(México) son todos los nombres de las ciudades que están en México
- f(Paris) todos los nombres de los países que tienen a Paris como una ciudad.

Ejemplo

Sean $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{a, b\}$. Se define la relación

$$f = \{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$$

Nótese que f es un subconjunto propio de $A \times B$. Luego,

1. $f(0) = \{a, b\}$
2. $f(1) = \{a\}$
3. $f(2) = \{b\}$
4. $f^{-1}(a) = \{0, 1\}$
5. $f^{-1}(b) = \{0\}$
6. $Dom\, f = \{0, 1, 2\}$
7. $Im\, f = \{a, b\}$

Ejemplo

Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Se puede definir una correspondencia $f : A \to B$ por

$$f(a) = \{1, 2\}, \quad f(b) = \varnothing, \quad f(c) = \{3\}$$

esto es,

$$f = \{(a, 1), (a, 2), (c, 3)\}$$

Tal correspondencia se puede visualizar por su diagrama *sagital*.

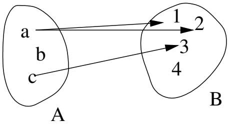

Figura: Diagrama sagital

Como podemos ver $Im\, f = \{1, 2, 3\}, \quad Dom\, f = \{a, c\}$