Lema

Sean $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ fórmulas. El siguiente es un teorema en L.

$$\neg\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$$

Dem. Por el teorema de la deducción basta con probar que

$$\neg\mathcal{B} \vdash \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$$

y a su vez, basta con

$$\neg\mathcal{B}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{C}$$

1. $\neg\mathcal{B}$, hip.
2. $\mathcal{B}$, hip.
3. $\mathcal{B} \to (\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B})$, Ax1,
4. $\neg\mathcal{B} \to (\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B})$, Ax1
5. $\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B}$, MP (2), (3)
6. $\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}$, MP (1), (4)
7. $(\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}) \to ((\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{C})$, Ax3
8. $(\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{C}$, MP (6), (7)
9. $\mathcal{C}$, MP (5), (8)

Por lo tanto

$$\neg\mathcal{B}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{C}$$

y el teorema de deducción asegura $\neg\mathcal{B} \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, lo que a su vez implica, por el teorema de deducción, de nuevo, que

$$\vdash \neg\mathcal{B} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C}).$$

Lema (contrarrecíproca)

Sean $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ fórmulas. Los siguientes son teoremas en L:

(a) $(\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})$

(b) $(\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B})$

Dem.

(a)

$$\vdash (\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})$$

Por el teorema de la deducción basta con probar que:

$$\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B} \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}$$

y a su vez que

$$\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{C}$$

1. $\mathcal{B}$, hip.
2. $\mathcal{B} \to (\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B})$, Ax1
3. $\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B}$, MP (1), (2)
4. $(\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}) \to ((\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{C})$, Ax3
5. $\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}$, hip.
6. $(\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{C}$, MP (5), (4)
7. $\mathcal{C}$, MP (3), (6)

(b) Probaremos que

$$\mathcal{B} \to \mathcal{C} \vdash \neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}$$

1. $(\neg\neg\mathcal{B} \to \neg\neg\mathcal{C}) \to (\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B})$, por el inciso anterior
2. $\mathcal{B} \to \neg\neg\mathcal{B}$, por doble negación (b)
3. $\mathcal{C} \to \neg\neg\mathcal{C}$, por doble negación (b)
4. $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$, hip.
5. $\mathcal{B} \to \neg\neg\mathcal{C}$, transitiva (a) de (4), (3)
6. $\neg\neg\mathcal{B} \to \mathcal{B}$, doble negación (a)
7. $\neg\neg\mathcal{B} \to \neg\neg\mathcal{C}$, transitiva (6), (5)
8. $\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}$, MP (9), (1)

entonces, por el teorema de deducción,

$$\vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}).$$

Lema

Sean $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ fórmulas. Entonces

(a) $\vdash \mathcal{B} \to (\neg\mathcal{C} \to \neg(\mathcal{B} \to \mathcal{C}))$

(b) $\vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to ((\neg B \to \mathcal{C}) \to \mathcal{C})$

Dem.

(a) Por el teorema de deducción basta con probar:

$$\mathcal{B}, \neg\mathcal{C} \vdash \neg(\mathcal{B} \to \mathcal{C}).$$

Tenemos que

$$\mathcal{B}, \mathcal{B} \to \mathcal{C} \vdash \mathcal{C} \tag{1}$$

pues

1. $\mathcal{B}$, hip.
2. $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$, hip
3. $\mathcal{C}$, MP (1), (2)

Podemos utilizar deducción en (1) para obtener

$$\mathcal{B} \vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$$

y de nuevo

$$\vdash \mathcal{B} \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C})$$

luego

1. $\mathcal{B} \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C})$, por lo anterior
2. $((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\neg\mathcal{C} \rightarrow \neg(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}))$, contrarrecíproca
3. $\mathcal{B} \rightarrow (\neg\mathcal{C} \rightarrow \neg(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}))$ por transitiva en (1), (2).

(b) De nuevo, por deducción basta con probar que

$$\mathcal{B} \to \mathcal{C} \vdash (\neg\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$$

y a su vez basta con

$$\mathcal{B} \to \mathcal{C}, \neg\mathcal{B} \to \mathcal{C} \vdash \mathcal{C}$$

1. $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$, hip.
2. $\neg\mathcal{B} \to \mathcal{C}$, hip.
3. $(\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B})$, contrarrecíproca
4. $\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}$, MP (1), (3)
5. $\mathcal{C} \to \neg\neg\mathcal{C}$, doble negación
6. $\neg\mathcal{B} \to \neg\neg\mathcal{C}$, transitiva (2), (5)
7. $(\neg\mathcal{B} \to \neg\neg\mathcal{C}) \to (\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B})$, contrarecíproca
8. $\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B}$, MP (6), (7)
9. $(\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}) \to ((\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{C})$, Ax3
10. $(\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{C}$, MP (4), (9)
11. $\mathcal{C}$, MP (8), (10)