

Recordemos que las pruebas deben de estar formadas por axiomas o por hipótesis o por deducciones de modus ponens. Sin embargo se permiten usar propiedades anteriores, en el entendido de que lo que realmente habría que hacer para obtener la prueba completa es pegar la prueba de la propiedad usada. Por ejemplo:

Corolario (Transitiva)

1. $B \rightarrow C, C \rightarrow D \vdash B \rightarrow D$
2. $B \rightarrow (C \rightarrow D), C \vdash B \rightarrow D$

Dem.

(1) Checaremos que

$$B \rightarrow C, C \rightarrow D, B \vdash D$$

En efecto

1. $B \rightarrow C$, hip.
2. $C \rightarrow D$, hip
3. B , hip.
4. C , MP, (3), (1)
5. D , MP, (2), (4)

luego usamos el teorema de la deducción para obtener

$$B \rightarrow C, C \rightarrow D \vdash B \rightarrow D.$$

(2) Checaremos que

$$\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}), \mathcal{C}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{D}$$

En efecto:

1. $\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})$, hip.
2. \mathcal{C} , hip
3. \mathcal{B} , hip.
4. $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, MP, (3), (1)
5. \mathcal{D} , MP (2), (4)

Luego, por el teorema de la deducción


$$\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}), \mathcal{C} \vdash \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$$

La demostración de estos corolarios no es la *prueba* en la teoría formal L . Lo que es es una explicación de por qué se puede obtener una prueba en L . Esta se llama *metaprueba*. Por ejemplo del inciso (b), si seguimos esta explicación con cuidado podemos obtener la prueba¹ en L :

$$\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}), \mathcal{C} \vdash \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}$$

Prueba.

1. \mathcal{C} hip.
2. $(\mathcal{C} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}))$ Ax1
3. $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$ MP (1), (2)
4. $(\mathcal{B} \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}))$ Ax1
5. $((\mathcal{B} \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B})) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B})) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B})))$
Ax2
6. $(\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}))$ Ax1

¹Esta prueba fué generada usando el sistema de cómputo *Maxima* con una aplicación desarrollada por el alumno Francisco Sosa Herrera y el autor. 

7. $((\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B})) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}))$ MP (4), (5)
8. $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B})$ MP (6), (7)
9. $(\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}))$ hip.
10. $((\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}))))$ Ax1
11. $(\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})))$ MP (9), (10)
12. $((\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}))) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}))))$
Ax2
13. $((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})))$ MP (11), (12)
14. $(\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}))$ MP (8), (13)
15. $((\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D})))$ Ax2
16. $((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}))$ MP (14), (15)
17. $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D})$ MP (3), (16)

Lema (doble negación)

Sea \mathcal{B} una FBF. Los siguientes son teoremas de L .

(a) $((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{B})$

(b) $(\mathcal{B} \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B})))$

Dem.

(a) $\vdash ((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{B})$

1. $((\underbrace{(\neg\mathcal{B})}_c \rightarrow \underbrace{(\neg(\neg\mathcal{B}))}_B)) \rightarrow (((\underbrace{(\neg\mathcal{B})}_c \rightarrow \underbrace{(\neg\mathcal{B})}_B) \rightarrow \underbrace{\mathcal{B}}_c))$, por

axioma A3

2. $((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg\mathcal{B}))$, por Lema $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$

3. $((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B}))) \rightarrow \mathcal{B}$, por Corolario 1 (2) en (2), (1)

4. $((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow ((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B}))))$, por axioma A1

5. $((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{B})$, por Corolario 1 (1) en (4),(3)

(b) $\vdash \mathcal{B} \rightarrow \neg\neg\mathcal{B}$

1. $((\neg\neg\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg\mathcal{B})) \rightarrow (((\neg\neg\neg\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \neg\neg\mathcal{B}))$, axioma A3
2. $\neg\neg\neg\mathcal{B} \rightarrow \neg\mathcal{B}$, inciso anterior
3. $(\neg\neg\neg\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \neg\neg\mathcal{B}$, MP, (2), (1)
4. $(\mathcal{B} \rightarrow (\neg\neg\neg\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}))$
5. $\mathcal{B} \rightarrow \neg\neg\mathcal{B}$, Corolario 1 (1) de (4) y (3)

De nuevo, las explicaciones anteriores no forman una prueba en L , sino es una metapueba. La prueba que se asegura existe en la prueba del Lema anterior inciso (a) es:

$$\vdash \neg\neg\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$$

Prueba.

1. $((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg\mathcal{B})) \rightarrow (\neg\mathcal{B})))$ Ax1
2. $((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg\mathcal{B})) \rightarrow (\neg\mathcal{B}))) \rightarrow (((\neg\mathcal{B}) \rightarrow ((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg\mathcal{B}))) \rightarrow ((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg\mathcal{B}))))$ Ax2
3. $((\neg\mathcal{B}) \rightarrow ((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg\mathcal{B})))$ Ax1
4. $((\neg\mathcal{B}) \rightarrow ((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg\mathcal{B}))) \rightarrow ((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg\mathcal{B}))$ MP (1), (2)
5. $((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg\mathcal{B}))$ MP (3), (4)
6. $((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg\mathcal{B})) \rightarrow (((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B}))) \rightarrow ((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg\mathcal{B})))$
Ax1

7. $(((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow ((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg \mathcal{B})))$ MP (5), (6)
8. $(((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow ((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B})))) \rightarrow ((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))))$ Ax1
9. $(((((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow ((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B})))))) \rightarrow ((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B})))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow ((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B})))))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow ((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))))))$ Ax2
10. $((((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow ((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))))))$ Ax1
11. $(((((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow ((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B})))))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow ((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))))))$ MP (8), (9)

12. $((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow ((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B})))$ MP (10), (11)
13. $((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg \mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{B})$ Ax3
14. $((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg \mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow$
 $((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow$
 $(\neg \mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{B}))))$ Ax1
15. $((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow$
 $(\neg \mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{B})))$ MP (13), (14)

16. $(((((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg \mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{B})))) \rightarrow (((((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow ((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B})))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg \mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{B})))))) \text{Ax2}$
17. $(((((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow ((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B})))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg \mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{B}))) \text{MP (15), (16)}$
18. $((((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg \mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{B})) \text{MP (12), (17)}$
19. $(((((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg \mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{B})) \rightarrow (((((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow ((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg \mathcal{B}))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow \mathcal{B})))) \text{Ax2}$
20. $(((((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow ((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg \mathcal{B}))) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg \mathcal{B}))) \rightarrow \mathcal{B})) \text{MP (18), (19)}$

21. $((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow (((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B}))) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B}))))$ Ax1
22. $((((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow (((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B}))) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B})))) \rightarrow$
 $(((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow ((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B})))) \rightarrow ((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow$
 $(\neg(\neg\mathcal{B}))))))$ Ax2
23. $((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow ((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B}))))$ Ax1
24. $((((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow ((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B})))) \rightarrow ((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow$
 $(\neg(\neg\mathcal{B}))))$ MP (21), (22)
25. $((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B})))$ MP (23), (24)
26. $((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow ((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B}))))$ Ax1
27. $((((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow ((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B})))) \rightarrow ((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow$
 $((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow ((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B}))))))$ Ax1
28. $((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow ((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow ((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B}))))))$ MP (26),
 (27)

29. $((\neg(\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow ((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow ((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B})))))) \rightarrow$
 $((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B}))) \rightarrow ((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow ((\neg\mathcal{B}) \rightarrow$
 $(\neg(\neg\mathcal{B}))))))$ Ax2
30. $((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B}))) \rightarrow ((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow ((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B}))))))$
 MP (28), (29)
31. $((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow ((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B}))))$ MP (25), (30)
32. $((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B}))) \rightarrow \mathcal{B}$ MP (7), (20)
33. $((((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B}))) \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow ((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow (((\neg\mathcal{B}) \rightarrow$
 $(\neg(\neg\mathcal{B}))) \rightarrow \mathcal{B})))$ Ax1
34. $((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow (((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B}))) \rightarrow \mathcal{B}))$ MP (32), (33)
35. $((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow (((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B}))) \rightarrow \mathcal{B})) \rightarrow (((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow$
 $((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B})))) \rightarrow ((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{B})))$ Ax2
36. $((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow ((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B})))) \rightarrow ((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{B}))$ MP
 (34), (35)
37. $((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{B})$ MP (31), (36)

Tarea

Exhibir las pruebas de

1. $\vdash_L (\neg B \rightarrow B) \rightarrow B$
2. $B \rightarrow C, C \rightarrow D \vdash_L B \rightarrow D$
3. $B \rightarrow (C \rightarrow D) \vdash_L C \rightarrow (B \rightarrow D)$
4. $\vdash_L (\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow C)$