La teoría formal L

Como ejemplo de los conceptos anteriores tenemos:

Definición

La teoría formal L es:

1. *Símbolos:* $(,), \neg, \rightarrow$, *letras mayúsculas itálicas* $A, B \ldots, P, Q, \ldots$ *y éstas con subíndices* $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ *que se llaman* **letras proposicionales**.
2. *Fórmulas bien formadas (FBF): se define recursivamente:*
   - 2.1 *Las letras proposicionales son FBF.*
   - 2.2 *Si* $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{C}$ *son FBF entonces también lo son* $(\neg\mathcal{B})$ *y* $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$.
3. *Axiomas: sean* $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ *FBF arbitrarias. Son axiomas:*
   - **A1** $(\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}))$
   - **A2** $((\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D})))$
   - **A3** $(((\neg\mathcal{C}) \rightarrow (\neg\mathcal{B})) \rightarrow (((\neg\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{C}))$
4. *Reglas de deducción: sólo una,* **modus ponens***:*

$$\frac{\begin{array}{l}\mathcal{B}\\ \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}\end{array}}{\mathcal{C}}$$

Ejemplo

Demostraremos que, para cualquier $\mathcal{B}$ FBF, se tiene que $\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ es un teorema.

Proof.

$$\vdash_L \mathcal{B} \to \mathcal{B}$$

Comezaremos usando el axioma A2 sustituyendo $\mathcal{C}$ por $(\mathcal{B} \to \mathcal{B})$ y $\mathcal{D}$ por $\mathcal{B}$ y luego usamos axioma A1 sustituyendo $\mathcal{C}$ por $(\mathcal{B} \to \mathcal{B})$:

1. $((\mathcal{B} \to (\underbrace{(\mathcal{B} \to \mathcal{B})}_{\mathcal{C}} \to \underbrace{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}})) \to ((\mathcal{B} \to \underbrace{(\mathcal{B} \to \mathcal{B})}_{\mathcal{C}}) \to (\mathcal{B} \to \underbrace{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}})))$, por A2
2. $(\mathcal{B} \to (\underbrace{(\mathcal{B} \to \mathcal{B})}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{B}))$, por A1
3. $(\mathcal{B} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{B})) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{B}))$, por modus ponens (MP), (2) y (1)
4. $(\mathcal{B} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{B}))$, por A1
5. $(\mathcal{B} \to \mathcal{B})$, MP (4) y (3)

Enunciamos el ejercicio anterior como un Lema.

Lema

Sea $\mathcal{B}$ una fórmula bien formada. Entonces la fórmula

$$(\mathcal{B} \to \mathcal{B})$$

es un teorema de L.

La idea principal es que las fórmulas que conocemos como válidas pueden ser deducidas como teoremas. Obsérvese que la prueba es un tanto elaborada, no es *natural*.

En el siguiente par de ejemplos, las pruebas son *naturales*.

Ejemplo

$$\mathcal{B} \to \mathcal{C}, \mathcal{C} \to \mathcal{D}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{D}$$

Prueba.

1. $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$, hip.
2. $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, hip
3. B, hip.
4. $\mathcal{C}$, MP, (3), (1)
5. $\mathcal{D}$, MP, (2), (4)

$\square$

Ejemplo

$$\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D}), \mathcal{C}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{D}$$

Prueba.

1. $\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D})$, hip.
2. $\mathcal{C}$, hip
3. $\mathcal{B}$, hip.
4. $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, MP, (3), (1)
5. $\mathcal{D}$, MP (2), (4)

$\square$

La prueba del siguiente ejemplo no es tan natural.

Ejemplo

$$(\mathcal{B} \to \mathcal{C}), (\mathcal{C} \to \mathcal{D}) \vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{D})$$

Proof.

1. $(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$ hip.
2. $(\mathcal{C} \to \mathcal{D})$ hip.
3. $((\mathcal{C} \to \mathcal{D}) \to (\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D})))$ Ax1
4. $(\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D}))$ MP (2), (3)
5. $((\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D})) \to ((\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{D})))$ Ax2
6. $((\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{D}))$ MP (4), (5)
7. $(\mathcal{B} \to \mathcal{D})$ MP (1), (6)

$\square$

De hecho tal prueba se obtuvo con la ayuda del *teorema de la deducción*, que a continuación exponemos.
En lo que sigue usaremos la convenciones anteriores sobre paréntesis para evitar su uso innecesario.

Propiedad (Teorema de la deducción)

Sea Γ un conjunto de FBF y $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ adicionales FBF. Entonces

$$\textit{si} \quad \Gamma, \mathcal{B} \vdash \mathcal{C} \ \textit{entonces}\ \Gamma \vdash (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}).$$

En particular, cuando $\Gamma = \varnothing$,

$$\textit{si} \quad \mathcal{B} \vdash \mathcal{C} \ \textit{entonces} \vdash (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}).$$

Dem. Si $\Gamma, \mathcal{B} \vdash \mathcal{C}$ entonces tenemos una prueba de $\mathcal{C}$ a partir de $\Gamma \cup \{\mathcal{B}\}$:

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{C}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{C}_n \end{array}\right\} \text{axiomas o están en } \Gamma \text{ o son } \mathcal{B} \text{ o son MP de anteriores}$$

donde $\mathcal{C}_n$ es $\mathcal{C}$. Probaremos por inducción sobre j que

$$\Gamma \vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{C}_j), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Caso base $j = 1$: Tenemos que checar que

$$\Gamma \vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{C}_1).$$

Sabemos que $\mathcal{C}_1$ es axioma o está en Γ o es $\mathcal{B}$.

- Si $\mathcal{C}_1$ es axioma o está en Γ ponemos la prueba:
  1. $\mathcal{C}_1$, axioma o hipótesis
  2. $(\mathcal{C}_1 \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C}_1))$, axioma A1
  3. $(\mathcal{B} \to \mathcal{C}_1)$, MP de (1) y (2)

$$\therefore \Gamma \vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{C}_1).$$

- Si $\mathcal{C}_1$ es $\mathcal{B}$, entonces conocemos la prueba (Lema 1) de $\vdash \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, esto es $\vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}_1$, luego, por definición de prueba, podemos asegurar que

$$\Gamma \vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{C}_1)$$

En cualquier caso $\Gamma \vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{C}_1)$.

Paso inductivo: supongamos que $\Gamma \vdash (\mathcal{B} \to C_k)$ con $k \leq j-1$. Trataremos de demostrar que

$$\Gamma \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}_j.$$

Sabemos que

1. $\mathcal{C}_j$ es axioma ó $\mathcal{C}_j \in \Gamma$ ó $\mathcal{C}_j$ es $\mathcal{B}$ ó
2. $\mathcal{C}_j$ se sigue de modus ponens de $\mathcal{C}_\ell$ y $\mathcal{C}_m$ con $\ell < j$, $m < j$.

1. Se puede razonar como en el caso $j = 1$ para obtener que

$$\Gamma \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}_j.$$

2. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{C}_m$ es $\mathcal{C}_\ell \to \mathcal{C}_j$. Luego podemos usar la hipótesis de inducción para obtener

$$\Gamma \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}_\ell \tag{1}$$
$$\Gamma \vdash \mathcal{B} \to (\mathcal{C}_\ell \to \mathcal{C}_j) \tag{2}$$

pero por el axioma A2,

$$\vdash (\mathcal{B} \to (\mathcal{C}_\ell \to C_j)) \to ((\mathcal{B} \to \mathcal{C}_\ell) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C}_j))$$

luego, por modus ponens con (2),

$$\Gamma \vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{C}_\ell) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C}_j)$$

y de nuevo por modus ponens con (1),

$$\Gamma \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}_j.$$

En cualquier caso

$$\Gamma \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}_j.$$

Así, por inducción matemática

$$\begin{aligned} \Gamma &\vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}_1 \\ \Gamma &\vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}_2 \\ &\vdots \\ \Gamma &\vdash \mathcal{B} \to \underbrace{\mathcal{C}_n}_{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

es decir,

$$\Gamma \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}.$$

Nótese que el axioma A3 no se usó en la demostración del teorema de la deducción.