Conectivos Redundantes

Cada fórmula $\mathcal{F}$ de PL de lugar a una función de verdad (función booleana) dada por la tabla de verdad de $\mathcal{F}$, por ejemplo, $P \wedge Q$ da lugar a la función $f(x_1, x_2)$ definida por

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

El recíproco también es cierto, es decir, cada función booleana da lugar a una fórmula que la genera.

Propiedad

Cada función de verdad es generada por una fórmula que involucra sólo a los conectivos $\neg, \wedge, \vee$*. Más formalmente: si* f *es función booleana, entonces existe una fórmula* $\mathcal{F}$ *que sólo tiene conectivos* $\neg, \wedge, \vee$ *tal que*

$$I \models \mathcal{F} \text{ si y sólo si } f(v_1, \ldots, v_n) = 1$$

donde $I : \{P_1 \mapsto v_1, \ldots, P_n \mapsto v_n\}$ *y* $P_1, \ldots, P_n$ *son las letras proposicionales de* $\mathcal{F}$*.*

Dem. Supongamos que $f(x_1, \ldots, x_n)$ es una función de verdad, es decir tenemos una tabla del tipo:

x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$f(x_1, \ldots, x_n)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

con 2^n renglones. Consideremos el i-ésimo renglón de la tabla. Ponemos:

$$\mathcal{G}_i : U_1^i \wedge U_2^i \wedge \ldots \wedge U_n^i$$

donde

$$U_j^i = \begin{cases} P_j & \text{si } x_j \text{ es } 1 \text{ en el } i\text{-ésimo renglón,} \\ \neg P_j & \text{si } x_j \text{ es } 0 \text{ en el } i\text{-ésimo renglón} \end{cases}$$

Nótese que cada $\mathcal{G}_i$ es verdera sólo en la asignación de valores de verdad del renglón i.

Si f es siempre 0 entonces f es generada por la fórmula

$$\mathcal{F} : P_1 \wedge \neg P_1.$$

Si f no siempre es 0 entonces podemos considerar los renglones donde f es 1: $i_1, \ldots, i_k$ y se define:

$$\mathcal{F} : \mathcal{G}_{i_1} \vee \cdots \vee \mathcal{G}_{i_k}$$

Para cada renglón i de la tabla de verdad de f pongamos I_i la asignación de valores de verdad correspondiente.
Entonces la fórmula definida $\mathcal{F}$ genera a f, pues si f es siempre 0, $\mathcal{F} : P_1 \wedge \neg P_1$ genera a $f \equiv 0$. Si f no siempre es 0, entonces si i es un renglón donde f es 0 entonces $I_i \not\models \mathcal{G}$, pues en caso contrario $I_i \models \mathcal{G}_{i_j}$ para algún j, lo que implica $i = i_j$: absurdo. Y si i es un renglón donde f es 1 entonces $i = i_j$ para algún j. Por lo que $I_i \models \mathcal{G}_{i_j}$ y entonces $I_i \models \mathcal{F}$.

Propiedad (Conectivos adecuados)

Sea $\mathcal{G}$ una fórmula. Entonces

1. *Existe una fórmula $\mathcal{F}_1$ formada sólo con conectivos $\neg$ y $\vee$, que es logicamente equivalente a $\mathcal{G}$.*
2. *Existe una fórmula $\mathcal{F}_2$ formada sólo con conectivos $\neg$ y $\wedge$, que es logicamente equivalente a $\mathcal{G}$.*
3. *Existe una fórmula $\mathcal{F}_3$ formada sólo con conectivos $\neg$ y $\to$, que es logicamente equivalente a $\mathcal{G}$.*

Dem.

1. Sea g la función de verdad inducida por $\mathcal{G}$. Por la propiedad anterior (Propiedad 1) existe una fórmula $\mathcal{G}_1$ formada únicamente con conectivos $\neg, \wedge, \vee$ tal que, para cualquier interpretación I

$$I \models \mathcal{G}_1 \text{ si y sólo si } g(v_1, \ldots, v_n) = 1$$

donde I está relacionada con $v_1, \ldots, v_n$ como dice la mencionada Propiedad 1. Luego $\mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{G}_1$. Ahora tenemos que, para cualesquera fórmulas $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ se cumple

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg(\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B})$$

luego podemos reeemplazar cada $\wedge$ de $\mathcal{G}_1$ siguiendo la equivalencia anterior para obtener una fórmula $\mathcal{F}_1$ formada sólo con los conectivos $\neg, \vee$ que es logicamente equivalente a $\mathcal{G}_1$, según la propiedad de sustitución de formas equivalentes. Luego $\mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{F}_1$.

2. Similar al anterior, pero ahora hay que reeemplazar cada $\vee$ que ocurre en $\mathcal{G}_1$ siguiendo la equivalencia:

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg(\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$$

3. Similar a los anteriores pero ahora usando,

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg(\mathcal{A} \to \neg\mathcal{B})$$

y

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg(\mathcal{B} \to \neg\mathcal{C})$$

Esta propiedad afirma que para estudiar las fórmulas de PL basta con considerar aquellas que sólo tengan dos conectivos $\neg, \wedge$ ó $\neg, \vee$ ó $\neg, \to$. En lo que sigue sólo consideraremos fórmulas que esten formadas con los conectivos $\neg$ y $\to$.

Teorías Formales

Una forma de averiguar la validez de una fórmula es, a diferencia de los métodos semánticos anteriores, usando sólo sintaxis: nada de interpretación. En lo que sigue expondremos tales ideas.

Definición

Una **teoría formal** $\mathcal{S}$ *es:*

1. *Un conjunto numerable de símbolos. Una sucesión finita de símbolos de* $\mathcal{S}$ *se llama* **expresión** *de* $\mathcal{S}$.
2. *Un subconjunto de expresiones de* $\mathcal{S}$ *llamadas* **fórmulas bien formadas** *(FBF). Debe de haber un procedimiento para determinar cuando una expresión es una FBF.*
3. *Un conjunto de FBF llamadas* **axiomas** *de* $\mathcal{S}$. *Se debe poder decidir cuando una FBF es un axioma. En tal caso* $\mathcal{S}$ *se llama* **teoría axiomática**.
4. *Un conjunto finito* $\mathfrak{R}_1, \ldots \mathfrak{R}_n$ *de relaciones entre FBF llamadas* **reglas de inferencia**. *Si una de éstas* $\mathfrak{R}_j$ *relaciona varias FBF con una* $\mathcal{B}$ *FBF, se dice* **consecuencia directa** *de tales FBF o que* $\mathcal{B}$ **se sigue** *de las FBF.*

Definición

1. *Una* **prueba** *en una teoría formal* $\mathcal{S}$ *es una sucesión finita de FBF, usalmente escrita de forma vertical:*

$$\begin{array}{c} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_k \end{array}$$

   tal que cada $\mathcal{B}_i$ *es un axioma ó* $\mathcal{B}_i$ *es consecuencia directa de algunas FBF precedentes.*

2. *Un* **teorema** *en una teoría formal* $\mathcal{S}$ *es la última fórmula bien formada* $\mathcal{B}$ *en una prueba. Tal prueba se llama* **prueba de** $\mathcal{B}$ **en** $\mathcal{S}$.

En general no hay un procedimiento para determinar si una fórmula bien formada $\mathcal{B}$ es un teorema ó no. Si lo hay, la teoría $\mathcal{S}$ se dice **decidible**, si no lo hay la teoría se llama **indecidible**.

Definición

Una FBF $\mathcal{C}$ se dice **consecuencia** *en la teoría $\mathcal{S}$ de un conjunto Γ de FBF si y sólo si hay una secuencia*

$$\begin{gathered}\mathcal{B}_1\\ \mathcal{B}_2\\ \vdots\\ \mathcal{B}_k\end{gathered}$$

de FBF tales que la última fórmula $\mathcal{B}_K$ es $\mathcal{C}$ y cada $\mathcal{B}_i$ es un axioma ó está en Γ ó $\mathcal{B}_i$ es consecuencia directa de algunas FBF que le preceden en la secuencia.

La secuencia se llama **prueba** ó **deducción** de $\mathcal{C}$ a partir de Γ y se denota

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \mathcal{C}$$

o bien

$$\Gamma \vdash \mathcal{C}$$

si no hay peligro de confusión sobre la teoría formal usada.
Si $\Gamma = \{\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_m\}$ se pone

$$\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_m \vdash \mathcal{C}$$

en lugar de

$$\{\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_m\} \vdash \mathcal{C}$$

y los elementos de Γ se llaman **hipótesis** o **premisas** de la prueba.

$\varnothing \vdash \mathcal{C}$ significa que existen FBF

$$\begin{gathered}\mathcal{B}_1\\ \mathcal{B}_2\\ \vdots\\ \mathcal{B}_k\end{gathered}$$

tales que $\mathcal{B}_k$ es $\mathcal{C}$ y que cada $\mathcal{B}_i$ es axioma o consecuencia directa de las FBF precedentes. Luego $\mathcal{C}$ es un teorema. Así:

$$\varnothing \vdash_{\mathcal{S}} \mathcal{C} \text{ si y sólo si } \mathcal{C} \text{ es un teorema}$$

en tal caso se escribe

$$\vdash_{\mathcal{S}} \mathcal{C}$$

en lugar de

$$\varnothing \vdash_{\mathcal{S}} \mathcal{C}.$$