Definición

Dos fórmulas $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ *se dicen* **logicamente equivalentes** *si para cualquier interpretación* I*,*

$$I \models \mathcal{F}_1 \text{ si y sólo si } I \models \mathcal{F}_2.$$

En tal caso se escribe $\mathcal{F}_1 \Leftrightarrow \mathcal{F}_2$*.*

La expresión $\mathcal{F}_1 \Leftrightarrow \mathcal{F}_2$ no es una fórmula.

Teorema

Sean $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ dos fórmulas. Entonces

$$\mathcal{F}_1 \Leftrightarrow \mathcal{F}_2 \textit{ si y sólo si } \mathcal{F}_1 \leftrightarrow \mathcal{F}_2 \textit{ es válida.}$$

Dem. Supongamos que $\mathcal{F}_1 \Leftrightarrow \mathcal{F}_2$. Por demostrar que $\mathcal{F}_1 \leftrightarrow \mathcal{F}_2$ es válida, lo cual haremos por contradicción:

1. $I \not\models \mathcal{F}_1 \leftrightarrow \mathcal{F}_2$, hipótesis

   (2a) $I \models \mathcal{F}_1 \wedge \neg\mathcal{F}_2$, caso de (1) y $\leftrightarrow$
   (3a) $I \models \mathcal{F}_1$, (2a) y $\wedge$
   (4a) $I \models \neg\mathcal{F}_2$, (2a) y $\wedge$
   (5a) $I \models \mathcal{F}_2$, de (3a) pues $\mathcal{F}_1 \Leftrightarrow \mathcal{F}_2$
   (6a) $I \models \bot$, (4a), (5a)

   (2b) $I \models \neg\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$, caso de (2) y $\leftrightarrow$
   (3b) $I \models \neg\mathcal{F}_1$, (2b) y $\wedge$
   (4b) $I \models \mathcal{F}_2$, (2b) y $\wedge$
   (5b) $I \models \mathcal{F}_1$, (4b) y $\mathcal{F}_1 \Leftrightarrow \mathcal{F}_2$
   (6b) $I \models \bot$, (3b), (5b)

Por lo tanto $\mathcal{F}_1 \leftrightarrow \mathcal{F}_2$ es válida.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{F}_1 \leftrightarrow \mathcal{F}_2$ es válida. Por demostrar que $\mathcal{F}_1 \Leftrightarrow \mathcal{F}_2$. Sea I interpretación, entonces, por definición de la tabla de verdad de $\leftrightarrow$, $I \models \mathcal{F}_1$ ssi $I \models \mathcal{F}_2$.

Ejemplo

Probar que $P \Leftrightarrow \neg\neg P$.

Proof.

Basta con checar que $P \leftrightarrow \neg\neg P$ es válida. Por contradicción:

1. $I \not\models P \leftrightarrow \neg\neg P$, hipótesis

(2a) $I \models P \wedge \neg(\neg\neg P)$, caso de (1) y $\leftrightarrow$
(3a) $I \models P$, (2a) y $\wedge$
(4a) $I \models \neg(\neg\neg P)$, (2) y $\wedge$
(5a) $I \not\models \neg\neg P$, (4a) y $\neg$
(6a) $I \models \neg P$, (5a) y $\neg$
(7a) $I \models \bot$, (3a), (6a)

(2b) $I \models \neg P \wedge \neg\neg P$, caso de (1) y $\leftrightarrow$
(3b) $I \models \neg P$, (2b) y $\wedge$
(4b) $I \models \neg\neg P$, (2b) y $\wedge$
(5b) $I \not\models \neg P$, (4b) y $\neg$
(6b) $I \models P$, (5b) y $\neg$
(7b) $I \models \bot$, (3b), (6b)

Tarea

Use argumentos semánticos para probar las siguientes afirmaciones:

1. $\top \Leftrightarrow \neg\bot$
2. $\bot \Leftrightarrow \neg\top$
3. $\neg\neg\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}$
4. $\mathcal{F} \wedge \top \Leftrightarrow \mathcal{F}$
5. $\mathcal{F} \wedge \bot \Leftrightarrow \bot$
6. $\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}$
7. $\mathcal{F} \vee \top \Leftrightarrow \top$
8. $\mathcal{F} \vee \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}$
9. $\mathcal{F} \to \top \Leftrightarrow \top$
10. $\mathcal{F} \to \bot \Leftrightarrow \neg\mathcal{F}$
11. $\top \to \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}$
12. $\bot \to \mathcal{F} \Leftrightarrow \neg\mathcal{F}$
13. $\neg(\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2) \Leftrightarrow \neg\mathcal{F}_1 \vee \neg\mathcal{F}_2$

14. $\neg(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) \Leftrightarrow \neg\mathcal{F}_1 \wedge \neg\mathcal{F}_2$
15. $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \neg\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_1$
16. $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \neg\mathcal{F}_2 \to \neg\mathcal{F}_1$
17. $(\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_3) \wedge (\mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3) \Leftrightarrow \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3$
18. $\mathcal{F}_1 \Rightarrow (\mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1)$
19. $\mathcal{F}_1 \to (\mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3) \Rightarrow (\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2) \to (\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_3)$
20. $\neg\mathcal{F}_2 \to \neg\mathcal{F}_1 \Rightarrow (\neg\mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1) \to \mathcal{F}_2$

Sustitución

Definición

Una **sustitución** σ *es una función de fórmulas a fórmulas:*

$$\sigma : \{\mathcal{F}_1 \mapsto \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \mapsto \mathcal{G}_n\}.$$

El **dominio** *de* σ *es*

$$\mathrm{dom}(\sigma) : \{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n\}$$

y el **rango** *de* σ *es*

$$\mathrm{range}(\sigma) : \{\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n\}.$$

La aplicación de una sustitución σ a una fórmula $\mathcal{F}$ se denota con $\mathcal{F}\sigma$ y reemplaza cada ocurrencia de la fórmula $\mathcal{F}_i$ en el dominio con la fórmula $\mathcal{G}_i$ del rango. Tales reemplazos se hacen *sólo una vez*. Si $\mathcal{F}_j$, $\mathcal{F}_k$ están en el dominio y $\mathcal{F}_k$ es subfórmula estricta de $\mathcal{F}_j$, la fórmula “grande” $\mathcal{F}_j$ es la que se reemplaza por $\mathcal{G}_j$.

$$\underbrace{\boxed{\qquad\quad |\mathcal{F}_k}}_{\mathcal{F}_j} \mapsto \mathcal{G}_j$$

Ejemplo

Considerar la fórmula

$$\mathcal{F} : P \wedge Q \to P \vee \neg Q$$

y sustitución

$$\sigma : \{P \mapsto R, P \wedge Q \mapsto P \to Q\}$$

entonces

$$\mathcal{F}\sigma : (P \to Q) \to R \vee \neg Q$$

pero $\mathcal{F}\sigma$ **no es**:

$$(R \to Q) \to R \vee \neg Q, \quad R \wedge Q \to R \vee \neg Q.$$

Definición

Una **sustitución de variables** *es una sustitución en la cual el dominio consiste sólo de variables proposicionales.*

Definición

Si $\mathcal{F}$ es una fórmula con $\mathcal{F}[\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n]$ se dice que la fórmula $\mathcal{F}$ puede tener subfórmulas $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n$.

Si $\sigma : \{\mathcal{F}_1 \mapsto \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \mapsto \mathcal{G}_n\}$ entonces

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n]\sigma : \mathcal{F}[\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n].$$

Ejemplo

Si $\mathcal{F} : P \wedge Q \to P \vee \neg Q$ y sustitución $\sigma : \{P \mapsto R, P \wedge Q \mapsto P \to Q\}$ entonces $\mathcal{F}[P, P \wedge Q]$ luego $\mathcal{F}[P, P \wedge Q]\sigma : \mathcal{F}[R, P \to Q]$

Propiedad (Sustitución de Formas Equivalentes)

Sea σ *la sustitución*

$$\sigma : \{\mathcal{F}_1 \mapsto \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \mapsto \mathcal{G}_n\}$$

y $\mathcal{F}$ *fórmula. Si para* i, $\mathcal{F}_i \Leftrightarrow \mathcal{G}_i$ *entonces*

$$\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}\sigma.$$

Ejemplo

Sea $\mathcal{F} : P \to Q$. Sabemos que $P \Leftrightarrow \neg\neg P$. Entonces si hacemos la sustitución $\sigma : \{P \mapsto \neg\neg P, Q \mapsto Q\}$ entonces $F \Leftrightarrow \mathcal{F}\sigma$, esto es

$$P \to Q \Leftrightarrow \neg\neg P \to Q.$$

Ejemplo

Sea $\mathcal{G} : (P \to Q) \to R$. Como $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ entonces para $\sigma : \{P \to Q \mapsto \neg P \vee Q\}$ se obtiene que $(P \to Q) \to R$ es equivalente a $(\neg P \vee Q) \to R$.

Propiedad (Formatos Válidos)

Si $\mathcal{F}$ es válida y σ alguna sustituciión de variables, entonces $\mathcal{F}\sigma$ es válida.

Ejemplo

Tenemos que

$$\mathcal{F} : P \to Q \leftrightarrow \neg P \vee Q$$

es válida. Entonces si P, Q son sustituidas por fórmulas $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ resulta que

$$\mathcal{F}\sigma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \leftrightarrow \neg \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$$

es válida. Es decir, para cualesquiera fórmulas

$$\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \neg \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2.$$