Los argumentos semánticos también se pueden usar para mostrar satisfactibilidad.

Ejemplo

Sea

$$\mathcal{F} : P \vee Q \rightarrow P \wedge Q.$$

Mostrar que $\neg\mathcal{F}$ es satisfactible.

Dem.

1. $I \not\models \neg\mathcal{F}$, hipótesis
2. $I \models \mathcal{F}$, (1) y $\neg$

(3a) $I \not\models P \vee Q$, (2) y caso de $\rightarrow$

(4a) $I \not\models P$, (3a) y $\vee$

(5a) $I \not\models Q$, (3a) y $\vee$

(6a) $I \models \neg P$, (4a) y $\neg$

(7a) $I \models \neg Q$, (5a) y $\neg$

Podemos notar que esta rama no se cierra. De hecho, de (4a) y (5a) se obtiene que

(8a) $I[P] = \textbf{false}$, (4a)

(9a) $I[Q] = \textbf{false}$, (5a)

(10a) $I : \{P \mapsto \textbf{false}, Q \mapsto \textbf{false}\}$, (8a) y (9a)

(3b) $I \models P \wedge Q$, (2) y caso de $\rightarrow$
(4b) $I \models P$, (3b) y $\wedge$
(5b) $I \models Q$, (3b) y $\wedge$
De nuevo esta rama no se cierra.
(6b) $I[P] = \textbf{true}$, (4b)
(7b) $I[Q] = \textbf{true}$, (5b)
(8b) $I : \{P \mapsto \textbf{true}, Q \mapsto \textbf{true}\}$, (6b) y (7b)

El razonamiento anterior muestra que: si $I \not\models \neg\mathcal{F}$ entonces $I : \{P \mapsto \textbf{false}, Q \mapsto \textbf{false}\}$ ó $I : \{P \mapsto \textbf{true}, Q \mapsto \textbf{true}\}$. Luego, razonando por contrarrecíproca, si I es diferentes de cualquiera de éstas dos asignaciones se debe de cumplir que $I \models \neg\mathcal{F}$. Por ejemplo, la asignación, $I : \{P \mapsto \textbf{true}, Q \mapsto \textbf{false}\}$ debe cumplir $I \models \neg\mathcal{F}$. Luego $\neg\mathcal{F}$ es satisfactible.

Tarea

En cada uno de las siguientes identifique si la fórmula es válida o no. Si es válida, pruébelo usando tablas de verdad o pruebas semánticas. Si no es válida identifique la interpretación que la falsifica. Recordar las convenciones para la precedencia de operadores y asociatividad.

1. $P \wedge Q \rightarrow P \rightarrow Q$
2. $(P \rightarrow Q) \vee P \wedge \neg Q$
3. $(P \rightarrow Q \rightarrow R) \rightarrow P \rightarrow R$
4. $\neg(P \wedge Q) \rightarrow R \rightarrow \neg R \rightarrow Q$
5. $P \wedge Q \vee \neg P \vee (\neg Q \rightarrow \neg P)$
6. $(P \rightarrow Q \rightarrow R) \rightarrow \neg R \rightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$
7. $(\neg R \rightarrow \neg Q \rightarrow \neg R) \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R$

Definición

La fórmula $\mathcal{F}_1$ **implica logicamente** *a la fórmula $\mathcal{F}_2$ si para cualquier interpretación I que cumple $I \models \mathcal{F}_1$ se obtiene $I \models \mathcal{F}_2$. En tal caso se escribe*

$$\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2$$

La expresión $\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2$ no es una fórmula.

Teorema

Sean $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ fórmulas de PL. Entonces

$$\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2 \textit{ si y sólo si } \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \textit{ es válida.}$$

Dem. Supongamos que $\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2$. Por demostrar que $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ es válida. Lo cual haremos razonando, como es usual, por contradicción.

1. $I \not\models \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$, hipótesis
2. $I \models \mathcal{F}_1$, (1) y $\to$
3. $I \not\models \mathcal{F}_2$, (1) y $\to$
4. $I \models \neg\mathcal{F}_2$, (3) y $\neg$
5. $I \models \mathcal{F}_2$, (2) y definición de $\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2$
6. $I \models \bot$, (4), (5) y $\bot$

Por lo tanto $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ es válida.

Recíprocamente, supongamos ahora que $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ es válida. Por demostrar que $\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2$. Para lo cual, según la definición de implicación lógica, tenemos que tomar cualquier interpretación I tal que $I \models \mathcal{F}_1$ y ahora tenemos que mostrar que $I \models \mathcal{F}_2$. Necesariamente $I \models \mathcal{F}_2$ porque en caso contrario $I \not\models \mathcal{F}_2$ y como $I \models \mathcal{F}_1$ se sigue que $I \not\models \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ según la semántica de $\to$, lo cual indicaría que $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ no es válida, lo que a su vez contradice la suposición original.

Ejemplo

Probar que $R \wedge (\neg R \vee P) \Rightarrow P$

Proof.

Basta con probar que $R \wedge (\neg R \vee P) \rightarrow P$ es válida.

1. $I \not\models R \wedge (\neg R \vee P) \rightarrow P$, hipótesis
2. $I \models R \wedge (\neg R \vee P)$, de (1) y $\rightarrow$
3. $I \not\models P$, de (1) y $\rightarrow$
4. $I \models R$, (2) y $\wedge$
5. $I \models \neg R \vee P$, (2) y $\wedge$
   - (6a) $I \models \neg R$, caso de (5) y $\vee$
   - (7a) $I \models \bot$, (4) y (6a)

   - (6b) $I \models P$, caso de (5) y $\vee$
   - (7b) $I \models \neg P$, (3) y $\neg$
   - (8b) $I \models \bot$, (6b) y (7b)

$\square$