Razonamientos semánticos

Se procede por contradicción. Se trata de comenzar suponiendo que la fórmula a determinar $\mathcal{F}$ es falsa, es decir, se supone que existe una interpretación I tal que $I \not\models \mathcal{F}$. Entonces se procede aplicando la semántica de los conectivos en forma de **reglas de prueba**.

Una regla de prueba tiene una o más premisas y una o más deducciones. Éstas son:

- $\dfrac{I \models \neg\mathcal{F}}{I \not\models \mathcal{F}}$ $\qquad$ $\dfrac{I \not\models \neg\mathcal{F}}{I \models \mathcal{F}}$
- $\dfrac{I \models \mathcal{F} \wedge \mathcal{G}}{\begin{array}{c} I \models \mathcal{F} \\ I \models \mathcal{G} \end{array}}$ $\qquad$ $\dfrac{I \not\models \mathcal{F} \wedge \mathcal{G}}{I \not\models \mathcal{F} \mid I \not\models \mathcal{G}}$
- $\dfrac{I \models \mathcal{F} \vee \mathcal{G}}{I \models \mathcal{F} \mid I \models \mathcal{G}}$ $\qquad$ $\dfrac{I \not\models \mathcal{F} \vee \mathcal{G}}{\begin{array}{c} I \not\models \mathcal{F} \\ I \not\models \mathcal{G} \end{array}}$
- $\dfrac{I \models \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}}{I \not\models \mathcal{F} \mid I \models \mathcal{G}}$ $\qquad$ $\dfrac{I \not\models \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}}{\begin{array}{c} I \models \mathcal{F} \\ I \not\models \mathcal{G} \end{array}}$

Nótese que $I \models \mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{G}$ ssi $I \models \mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$ ó $I \not\models .\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$. Además

$$\begin{aligned} I \not\models \mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{G} &\text{ ssi } (I \models \mathcal{G} \text{ y } I \not\models \mathcal{G}) \text{ ó } (I \not\models \mathcal{F} y I \models \mathcal{G}) \\ &\text{ ssi } (I \models \mathcal{F} \text{ y } I \models \neg\mathcal{G}) \text{ ó } (I \models \neg\mathcal{F} \text{ y } I \models \mathcal{G}) \\ &\text{ ssi } (I \models \mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{G}) \text{ ó } I \models \neg\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \end{aligned}$$

Por lo que se pone:

- $$\frac{I \quad \models \quad \mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{G}}{I \models \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \quad | \quad I \not\models \mathcal{F} \vee \mathcal{G}}$$
  $$\frac{I \quad \not\models \quad \mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{G}}{I \models \mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{G} \quad | \quad I \models \neg\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}}$$

- $$\frac{\begin{array}{ccc} I & \models & \mathcal{F} \\ I & \models & \neg\mathcal{F} \end{array}}{\begin{array}{ccc} I & \models & \bot \end{array}}$$

Esta última indica una contradicción, pues antes definimos que nunca $\bot$ se podía validar.

Ejemplo

Probar que la fórmula es válida.

$$\mathcal{F} : P \wedge Q \to P \vee \neg Q$$

Dem. Por contradicción. Supongamos que $\mathcal{F}$ es inválida, es decir, que existe una interpretación I tal que $I \not\models \mathcal{F}$. Entonces

1. $I \not\models P \wedge Q \to P \vee \neg Q$, hipótesis
2. $I \models P \wedge Q$, semántica de $\to$ y (1)
3. $I \not\models P \vee \neg Q$, semántica de $\to$ y (1)
4. $I \models P$, semántica de $\wedge$ y (2)
5. $I \models Q$, semántica de $\wedge$ y (2)
6. $I \not\models P$, semántica de $\vee$ y (3)
7. $I \not\models \neg Q$, semántica de $\vee$ y (3)
8. $I \models \neg P$, semántica de $\neg$ y (6)

9. $I \models Q$, semántica de $\neg$ y (7)
10. $I \models \bot$, semántica de $\bot$ y (4), (8)

$$\therefore \mathcal{F} \text{ es válida.}$$

En el ejemplo anterior también se pudo haber escrito:

1. $I \not\models P \wedge Q \to P \vee \neg Q$, hipótesis
2. $I \models P \wedge Q$, semántica de $\to$ y (1)
3. $I \not\models P \vee \neg Q$, semántica de $\to$ y (1)
4. $I \models P$, semántica de $\wedge$ y (2)
5. $I \not\models P$, semántica de $\vee$ y (3)
6. $I \models \bot$, semántica de $\bot$ y (4), (5)

Hay ocasiones en que en las pruebas hay que examinar varios casos. Esto es, las pruebas se *ramifican*.

Ejemplo

Probar que la fórmula es válida.

$$\mathcal{F} : (P \to Q) \land (Q \to R) \to (P \to R)$$

Dem. Por contradicción. Supóngamos que no es válida, i.e., existe I una interpretación tal que $I \not\models \mathcal{F}$.

1. $I \not\models \mathcal{F}$
2. $I \models (P \land Q) \land (Q \to R)$, por (1) y semántica de $\to$,
3. $I \not\models (P \to Q)$, (1) y semántica de $\to$
4. $I \models P$, (3) y semántica de $\to$
5. $I \not\models R$, (3) y semántica de $\to$
6. $I \models P \to Q$, (2) y semántica de $\land$
7. $I \models Q \to R$, (2) y semántica de $\land$

   Ahora hay dos casos de (6): $I \not\models P$ ó $I \models Q$.

   (8a) $I \not\models P$, (6) y semántica de $\to$

   (9a) $I \models \neg P$, (8a) y semántica de $\neg$

   (10a) $I \models \bot$, (9a), (4) y semántica de $\bot$

(8b) $I \models Q$, (6) y semántica de $\rightarrow$

y ahora hay dos subcasos de (7): $I \not\models Q$ ó $I \models R$

(9ba) $I \not\models Q$, (7) y semántica de $\rightarrow$

(10ba) $I \models \neg Q$, (9ba) y semántica de $\neg$

(11ba) $I \models \bot$, (8b), (10ba) y semántica de $\bot$.
Con lo que se termina este subcaso.

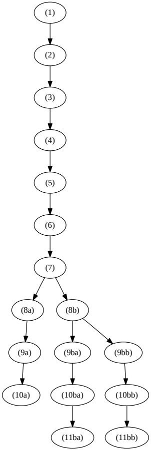
(9bb) $I \models R$, (7) y semántica de $\rightarrow$

(10bb) $I \models \neg R$, (5) y semántica de $\neg$

(11bb) $I \models \bot$, (9bb), (10bb) y semántica de $\bot$.
Lo que termina este caso.

Se han examinado todos los casos y éstos siempre terminan en una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es válida.

Nótese que la prueba del ejemplo anterior tiene la forma dada por la Figura 1. Esto es porque los casos corresponden a ramificaciones. Una **rama** del árbol es una secuencia de líneas descendientes de la raíz. Una **rama está cerrada** si contiene una contradicción: o bien $I \models \bot$ ó implícitamente $I \models \mathcal{G}$ y $I \not\models \mathcal{G}$. En caso contrario se dice que la **rama está abierta**.



Definición

1. *Una línea L se dice* **descendiente directo** *de una línea padre M si L está directamente abajo de L en una prueba semántica.*
2. *L es* **descendiente** *de M si L es M o L es descendiente directo de M o si el padre de L es descendiente de M. Esto es*

   $$\textit{descendiente}{=}\textit{clausura transitiva de descendiente directo.}$$
3. *M es* **ancestro** *de L si L es descendiente de M.*

Las reglas de prueba anteriores son suficientes para averiguar validez y satisfactibilidad; sin embargo reglas de prueba *derivadas* ó reglas de deducción hacen las pruebas más concisas. Un ejemplo es **modus ponens**:

$$\begin{array}{lll} I & \models & \mathcal{F} \\ I & \models & \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \\ \hline I & \models & \mathcal{G} \end{array}$$

Ejemplo

Probar que la fórmula

$$\mathcal{F} : (P \to Q) \land (Q \to R) \to (P \to R)$$

es válida.

Dem.

1. $I \not\models \mathcal{F}$, hipótesis
2. $I \models (P \to Q) \land (Q \to R)$, (1) y $\to$
3. $I \not\models P \to R$, (1) y $\to$
4. $I \models P$, (3) y $\to$
5. $I \not\models R$, (3) y $\to$
6. $I \models P \to Q$, (2) y $\land$
7. $I \models Q \to R$, (2) y $\land$
8. $I \models Q$, modus ponens de (4) y (6)
9. $I \models R$, modus ponens de (7) y (8)
10. $I \models \neg R$, (5) y $\neg$
11. $I \models \bot$, (9), (10) y $\bot$