Definición

Un **ejemplar** *de una fórmula proposional es la sustitución en cada letra proposicional por una fórmula.*

Ejemplo

Sea $\mathcal{B} : A_1 \to \neg A_2 \vee A_1$ fórmula proposicional. Un ejemplar de $\mathcal{B}$ es:

$$q(x_1) \to (\neg \forall x_2.\, p(x_1, x_2)) \vee q(x_1)$$

Propiedad (VII)

Si $\mathcal{B}$ es fórmula proposicional válida y $\mathcal{B}'$ ejemplar de $\mathcal{B}$ entonces $\models_I \mathcal{B}'$ para toda interpretación I.

Dem. Sea I una interpretación. Primero se demostrará que cada ejemplar de los axiomas es verdadero.
Sean $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ fórmulas en FOL:

(A1) $\models_I \mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{B})$: Sea J una variación de I. Sabemos que la siguiente afirmación es cierta:

$$J \models \mathcal{B} \text{ ó } J \not\models \mathcal{B}$$

luego es cierta

$$J \not\models \mathcal{B} \text{ ó } J \not\models \mathcal{C} \text{ ó } J \models \mathcal{B}$$

por lo que se cumple

$$J \not\models \mathcal{B} \text{ ó } J \models \mathcal{C} \to \mathcal{B}$$

luego

$$J \models \mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{B})$$

y como J es arbitraria se concluye que

$$\models_I \mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{B})$$

(A2) $\models_I (\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D})) \to ((\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{D}))$: por contradicción:

1. $\not\models_I (\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D})) \to ((\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{D}))$, hip.
2. $J \not\models_I (\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D})) \to ((\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{D}))$ para alguna J variación de I, (1)
3. $J \models \mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D})$, (2), $\to$
4. $J \not\models (\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{D})$, (2), $\to$
5. $J \models \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, (4), $\to$
6. $J \not\models \mathcal{B} \to \mathcal{D}$, (4), $\to$
7. $J \models \mathcal{B}$, (6), $\to$
8. $J \not\models \mathcal{D}$, (6), $\to$
9. $J \models \mathcal{C}$, MP (5),(7)
10. $J \not\models \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, (9), (8), $\to$
11. $J \not\models \mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D})$, (7), (10), $\to$
12. $J \models \perp$, (3) (11)

(A3) Tarea.

Sea $\mathcal{F}$ cualquier fórmula de PL válida y $\mathcal{F}'$ un ejemplar de $\mathcal{F}$. Por demostrar $\models_I \mathcal{F}'$. Por el teorema de completez sabemos que $\vdash \mathcal{F}$, es decir existe una prueba de $\mathcal{F}$:

$$\begin{array}{c} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_k \end{array}$$

donde $\mathcal{B}_k$ es $\mathcal{F}$. Sean $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2, \ldots, \mathcal{B}'_k$ los ejemplares de las sustituciones correspondientes a $\mathcal{F}'$; $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ tienen que ser axiomas y $\mathcal{B}_3$ axioma o modus ponens de los anteriores. Por lo anterior

$$\models_I \mathcal{B}'_1$$
$$\models_I \mathcal{B}'_2$$

y por la propiedad (III) entonces también

$$\models_I \mathcal{B}'_3.$$

Repitiendo este proceso:

$$\models_I \mathcal{B}'_1$$
$$\models_I \mathcal{B}'_2$$
$$\vdots$$
$$\models_I \mathcal{B}'_k$$

entonces $\models_I \mathcal{F}'$.

Lema

Si t es un término, I interpretación tales que $\mathrm{free}(t) \subset \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ y J, K dos variaciones de I tales que

$$\alpha_J[x_{i_1}] = \alpha_K[x_{i_1}], \ldots, \alpha_J[x_{i_k}] = \alpha_K[x_{i_k}]$$

entonces

$$\alpha_J[t] = \alpha_K[t].$$

Dem.

Por inducción sobre m el número de símbolos función que forman t.

$m = 0$: Tenemos dos casos t es constante o variable. Si t es una constante a ($\text{free}(a) = \varnothing$)). Como J, K son variaciones de I entonces coinciden con I excepto en ciertas variables, luego como a no es una variable:

$$\alpha_J[t] = \alpha_J[a] = \alpha_I[a] = \alpha_K[a] = \alpha_K[t]$$

Si t es una variable, como $\text{free}(t) \subset \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ entonces t es x_{i_j}, luego

$$\begin{aligned}
\alpha_J[t] &= \alpha_J[x_{i_j}] \\
&= \alpha_K[x_{i_j}] && \text{por hipótesis} \\
&= \alpha_K[t].
\end{aligned}$$

$m > 0$: t es $f(t_1, \ldots, t_n)$ con cada término t_i con menos de m símbolos función. Supongamos cierto el resultado cuando se tienen $< m$ símbolos función. Entonces $\alpha_J[t_1] = \alpha_K[t_1], \ldots, \alpha_J[t_n] = \alpha_K[t_n]$. Luego,

$$\begin{aligned}
\alpha_J[t] &= \alpha_J[f(t_1, \ldots, t_n)] \\
&= \alpha_J[f](\alpha_J[t_1], \ldots, \alpha_J[t_n]), && \text{por definición,} \\
&= \alpha_I[f](\alpha_K[t_1], \ldots, \alpha_K[t_n]), && \text{por hip. de inducción} \\
&= \alpha_K[f](\alpha_K[t_1], \ldots, \alpha_K[t_n]) \\
&= \alpha_K(f(t_1, \ldots, t_n)) \\
&= \alpha_K[t].
\end{aligned}$$

1. En un ejemplo anterior se demostró que

$$\forall x.\, \mathcal{F} \Leftrightarrow \neg(\exists x.\, \neg\mathcal{F})$$

como consecuencia

$$\exists x.\, \mathcal{F} \Leftrightarrow \neg\forall x.\, \neg\mathcal{F}$$

por lo que sintánticamente el cuantificador existencial $\exists$se puede considerar como una abreviatura de $\neg\forall x.\, \neg$. En lo que sigue consideraremos a $\exists x$ como tal abreviatura.
2. Recordemos que:
   2.1 Un átomo es un predicado aplicado a términos:

   $$p(t_1, \ldots, t_n)$$

   2.2 Una literal es un átomo o su negación:

   $$p(t_1, \ldots, t_n), \neg p(t_1, \ldots, t_n).$$

   2.3 Una fórmula es:
      - literal
      - aplicación de conectivos a fórmulas
      - aplicación de cuantificadores a fórmulas