Ejemplo

Mostrar que

$$\mathcal{H} : (\forall x.\, \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2) \leftrightarrow (\forall x\, \mathcal{F}_1) \wedge \mathcal{F}_2$$

es un esquema de fórmulas válido si se cumple que $x \notin \text{free}(\mathcal{F}_2)$.

Proof.

1. $I \not\models \mathcal{H}$, hip.

(2a) $I \models \forall x.\, \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$, (1), $\leftrightarrow$

(3a) $I \not\models (\forall x.\, \mathcal{F}_1) \wedge \mathcal{F}_2$,(1), $\leftrightarrow$

(4a) $I \models (\forall x.\, \mathcal{F}_1) \wedge (\forall x.\, \mathcal{F}_2)$, (2a) y ejemplo anterior

(5a) $I \models (\forall x.\, \mathcal{F}_1) \wedge \mathcal{F}_2$, (4a) y esquema válido del ejemplo inmediato anterior

(6a) $I \models \perp$, (3a) (5a)

(2b) $I \not\models \forall x.\, \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$, (1), $\leftrightarrow$

(3b) $I \models (\forall x.\, \mathcal{F}_1) \wedge \mathcal{F}_2$, (1), $\leftrightarrow$

(4b) $I \models (\forall x.\, \mathcal{F}_1) \wedge (\forall x. \mathcal{F}_2)$, (3b) y esquema válido de ejemplo inmediato anterior

(5b) $I \models \forall x.\, (\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2)$, por sustitución en esquema válido anterior

(6b) $I \models \perp$, (2b) (5b)

$\square$

Tarea

Use el método de argumentos semánticos para probar los siguientes esquemas de fórmulas:

1. $\neg(\forall x.\,\mathcal{F}) \Leftrightarrow \exists.\neg\mathcal{F}$
2. $\neg(\exists x.\,\mathcal{F}) \Leftrightarrow \forall x.\,\neg\mathcal{F}$
3. $\forall x, y.\,\mathcal{F} \Leftrightarrow \forall y, x.\,\mathcal{F}$
4. $\exists y.\,\forall x.\,\mathcal{F} \Rightarrow \forall x.\,\exists y.\,\mathcal{F}$
5. $\exists x.\,\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \Leftrightarrow (\exists x.\,\mathcal{F}) \vee (\exists y.\,\mathcal{G})$
6. $\exists x.\,\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \Leftrightarrow (\forall x.\,\mathcal{F}) \rightarrow (\exists y.\mathcal{G})$
7. $\exists x.\,\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \Leftrightarrow (\exists x.\,\mathcal{F}) \vee \mathcal{G}$, *si* $x \notin \mathrm{free}(G)$
8. $\forall x.\,\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \Leftrightarrow (\forall x.\,\mathcal{F}) \vee \mathcal{G}$, *si* $x \notin \mathrm{free}(G)$
9. $\exists x.\,\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \Leftrightarrow (\exists x.\,\mathcal{F}) \wedge \mathcal{G}$, *si* $x \notin \mathrm{free}(G)$
10. $\forall x.\,\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \Leftrightarrow (\exists x.\,\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{G}$, *si* $x \notin \mathrm{free}(G)$

Propiedades generales de la semántica

Definición

Sea $\mathcal{B}$ una fórmula, I una interpretación.

1. *Se dice que $\mathcal{B}$ es* **verdadera para la interpretación** *I y se escribe $\models_I \mathcal{B}$ si y sólo si para toda J variación de I se cumple*

$$J \models \mathcal{B}$$

2. *$\mathcal{B}$ se dice* **falsa para la interpretación** *I si y sólo si para toda J variación de I se cumple*

$$J \not\models \mathcal{B}$$

3. *La interpretación I se dice* **modelo** *para un conjunto de fórmulas Γ si y sólo si, para toda $\mathcal{B} \in \Gamma$, $\models_I \mathcal{B}$.*

Propiedad

(I) *$\mathcal{B}$ es falsa para I si y sólo si $\neg\mathcal{B}$ es verdadera para I.*

(II) *$\mathcal{B}$ es verdadera para I si y sólo si $\neg\mathcal{B}$ es falsa para I.*

Proof.

(I) $\mathcal{B}$ es falsa para I ssi para toda variación J de I, $J \not\models \mathcal{B}$ ssi $J \models \neg\mathcal{B}$ ssi $\models_I \neg\mathcal{B}$.

(II) Tarea.

$\square$

Propiedad

(III) *Si* $\models_I \mathcal{B}$ *y* $\models_I \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *entonces* $\models_I \mathcal{C}$.

(IV) $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *es falsa para* I *ssi* $\models_I \mathcal{B}$ *y* $\models_I \neg\mathcal{C}$.

Dem.

(III) Por contradicción:

1. $\not\models_I \mathcal{C}$, hip.
2. $\models_I \mathcal{B}$, hip.
3. $\models_I \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, hip.
4. $J \not\models \mathcal{C}$ para alguna variación J de I, (1)
5. $J \models \mathcal{B}$, (2)
6. $J \not\models \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, (5) (4) y $\to$
7. $J \models \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, (3)
8. $J \models \perp$, (6), (7)

(IV) Supongamos que $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es falsa para I entonces para toda variación J de I, $J \not\models \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, esto es $J \models \mathcal{B}$ y $J \not\models \mathcal{C}$. Entonces para toda variación J de I ocurre que $J \models \mathcal{B}$ y para toda variación J de I ocurre $J \not\models \mathcal{C}$, luego $I \models_I \mathcal{B}$ y $\models_I \neg\mathcal{C}$. Recíprocamente, supongamos que $\models_I \mathcal{B}$ y $\models_I \neg\mathcal{C}$. Si J es cualquier variación de I entonces $J \models \mathcal{B}$ y $J \models \neg\mathcal{C}$, entonces $J \not\models B \to \mathcal{C}$. Tenemos que para cualquier variación J de I ocurre que $J \not\models \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, lo que significa que $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es falsa para I.

Propiedad ((VI))

$\models_I \mathcal{B}$ si y sólo si $\models_I \forall x_i . \mathcal{B}$, para cualquier variable x_i. En consecuencia

$$\models_I \mathcal{B} \text{ ssi } \models_I \forall * . \mathcal{B}$$

Dem.

Supongamos que $\models_I \mathcal{B}$ entonces, para cualquier variación J de I se cumple $J \models \mathcal{B}$. Tomemos una variación J y $v \in D_I$ cualquiera, además de una variable x_i. Por hipótesis:

$$J \models \mathcal{B}.$$

Entonces $J \triangleleft \{x_i \mapsto v\}$ es una nueva variación de I por lo que

$$J \triangleleft \{x_i \mapsto v\} \models \mathcal{B}, \qquad \text{para todo } v \in D_I$$

luego por definición

$$J \models \forall x_i . \mathcal{B}, \qquad \text{para toda } J \text{ variación de } I$$

y de nuevo, por definición

$$\models_I \forall x_i . \mathcal{B}.$$

Recíprocamente, supongamos $\models_I \forall x_i . \mathcal{B}$ para x_i alguna variable. Sea J cualquier variación de I. Por hipótesis

$$J \models \forall x_i . \mathcal{B}. \tag{1}$$

Por definición de interpretación, J, que es una interpretación, debe de asignarle algún valor a la variable x_i: $\alpha_J[x_i] \in D_I$, luego J es la x_i-variación $J \lhd \{x_i \mapsto \alpha_J[x_i]\}$. Luego de (1),

$$J \lhd \{x_i \mapsto \alpha_J[x_i]\} \models \mathcal{B}$$

que es

$$J \models \mathcal{B}$$

lo cual ocurre para cada variación J; por lo tanto, por definición,

$$\models_I \mathcal{B}.$$

Ahora, si free$(\mathcal{B}) = \varnothing$ entonces $\forall * . \mathcal{B}$ es $\mathcal{B}$, luego trivialmente se cumple

$$\models_I \mathcal{B} \text{ ssi } \models_I *. \mathcal{B}$$

y si $\mathrm{free}(\mathcal{B}) = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ se cumple

$$\begin{aligned}
\models_I \mathcal{B} \ &\text{ssi } \forall x_{i_k}.\, \mathcal{B} \\
&\text{ssi } \forall x_{i_{k-1}}.\, \forall x_{i_k}.\, \mathcal{B} \\
&\ldots \\
&\underbrace{\text{ssi } \forall x_{i_1}.\ \ldots \forall x_{i_{k-1}}.\, \forall x_{i_k}.\, \mathcal{B}}_{\forall *.\, \mathcal{B}}
\end{aligned}$$