Esquemas de sustituciones

Sabemos que

$$\forall x.\, p(x) \Leftrightarrow \neg\exists x.\, \neg p(x)$$

pero de aquí no se infiere que

$$\mathcal{H} : \forall x.\, \mathcal{F} \leftrightarrow \neg\exists x.\, \neg\mathcal{F}$$

sea válida, pues esta fórmula es más general. De hecho $\mathcal{H}$ es un ejemplo de un **esquema de fórmulas** con **soporte (estante)** (placeholder) $\mathcal{F}$.
Un esquema de fórmulas $\mathcal{H}$ contiene al menos un soporte y posiblemente *condiciones laterales* que especifican que ciertas variables no pueden aparecer libremente en el estante.

Definición

Consideremos una sustitución σ que mapea estantes a fórmulas. Un **esquema de sustitución** *es una aplicación de σ a un esquema de fórmulas que es legal sólo si σ obedece las condiciones laterales del esquema de fórmulas.*

Propiedad (Esquema de fórmulas)

Si $\mathcal{H}$ es un esquema de fórmulas válido y σ es un esquema de sustitución obedeciendo las condiciones laterales de $\mathcal{H}$ entonces $\mathcal{H}\sigma$ es también válido.

Ejemplo

La fórmula válida $P \to Q \leftrightarrow (\neg P \lor Q)$ de PL da lugar al esquema de fórmulas válido $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \leftrightarrow (\neg \mathcal{F}_1 \lor \mathcal{F}_2)$.

Ejemplo

Mostraremos que

$$\mathcal{H} : (\forall x. \mathcal{F}) \leftrightarrow (\neg \exists x. \neg \mathcal{F})$$

es un esquema de fórmulas válido.

Proof.

Supongamos:

1. $I \not\models \mathcal{H}$, hip.

(2a) $I \models \forall x. \mathcal{F}$, (1), $\leftrightarrow$

(3a) $I \not\models \neg \exists x. \neg \mathcal{F}$, (1), $\leftrightarrow$

(4a) $I \models \exists x. \neg \mathcal{F}$, (3a), $\neg$

(5a) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \neg \mathcal{F}$ para alguna $v \in D_I$, (4a), $\exists$

(6a) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}$, (2a), $\forall$

(7a) $I \models \bot$, (5a) (6a)

(2b) $I \not\models \forall x. \mathcal{F}$, (1), $\leftrightarrow$

(3b) $I \models \neg \exists x. \neg \mathcal{F}$, (1), $\leftrightarrow$

(4b) $I \lhd \{x \mapsto v\} \not\models \mathcal{F}$, para algún $v \in D_I$, (2b), $\forall$

(5b) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \neg \mathcal{F}$, (4b), $\neg$

(6b) $I \lhd \{x \mapsto v\} \not\models \neg \mathcal{F}$, (3b), $\forall$

(7b) $I \models \bot$, (5b) (6b)

Ejemplo

Ahora supongamos que queremos probar la validez de

$$\mathcal{G} : (\forall x.\, \exists y.\, q(x, y)) \leftrightarrow (\neg\exists x.\, \neg\exists y.\, q(x, y))$$

Sabemos que la fórmula $\mathcal{H}$ del ejemplo inmediato anterior es válida y que entonces $\mathcal{H}$ actúa como un esquema de fórmulas con estante $\mathcal{F}$; luego podemos sustuir en $\mathcal{F}$ con el esquema de sustitución

$$\sigma : \{\mathcal{F} \mapsto \exists y.\, q(x, y)\}$$

para obtener que $\mathcal{H}\sigma$ es $\mathcal{G}$. Luego $\mathcal{G}$ es válida.

Ejemplo

Consideremos el esquema de fórmulas con condición lateral:

$$\mathcal{H} : (\forall x. \mathcal{F}) \leftrightarrow \mathcal{F} \text{ si } x \notin \text{free}(\mathcal{F}).$$

$\mathcal{H}$ es válida:

Proof.

1. $I \not\models \mathcal{H}$, hip.

(2a) $I \models \forall x.\mathcal{F}$, (1), $\leftrightarrow$

(3a) $I \not\models \mathcal{F}$, (1), $\leftrightarrow$

(4a) $I \triangleleft \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}$ para toda $v \in D_I$

(5a) $I \models \mathcal{F}$ pues $x \notin \text{free}(\mathcal{F})$, (4a)

(6a) $I \models \bot$, (3a) (5a)

(2b) $I \not\models \forall x. \mathcal{F}$, (1), $\leftrightarrow$

(3b) $I \models \mathcal{F}$, (1), $\leftrightarrow$

(4b) $I \triangleleft \{x \mapsto v\} \models \neg\mathcal{F}$ para algún $v \in D_I$, (2b), $\forall$

(5b) $I \models \neg\mathcal{F}$ pues $x \notin \text{free}(\mathcal{F})$

(6b) $I \models \bot$

Luego, por ejemplo, la fórmula

$$\mathcal{G} : (\forall x.\, \exists y.\, p(z, y)) \rightarrow \exists y.\, p(z, y)$$

es válida pues se obtiene de la sustitución

$$\sigma : \mathcal{F} \mapsto \exists y.\, p(z, y)$$

que es legal pues satisface la condición lateral de $\mathcal{H}$:

$$x \notin \mathrm{free}(\exists y.\, p(z, y)).$$

Pero

$$\mathcal{G}' : (\forall x.\, p(x)) \rightarrow p(x)$$

no se puede aseguar válido, pues se obtiene de $\mathcal{H}$ de la sustitución

$$\sigma : \mathcal{F} \mapsto p(x)$$

que no cumple con la condición lateral:

$$x \in \mathrm{free}(p(x)).$$

Ejemplo

Para mostrar la validez del esquema de fórmulas

$$\mathcal{H} : (\forall x. \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2) \leftrightarrow (\forall x. \mathcal{F}_1) \wedge (\forall x. \mathcal{F}_2)$$

hacemos

1. $I \not\models \mathcal{H}$

(2a) $I \models \forall x. \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$, (1), $\leftrightarrow$

(3a) $I \not\models (\forall x. \mathcal{F}_1) \wedge (\forall x. \mathcal{F}_2)$, (1), $\leftrightarrow$

(4a) $I \models \neg((\forall x. \mathcal{F}_1) \wedge (\forall x. \mathcal{F}_2))$, (3a), $\neg$

(5a) $I \models \neg(\forall x. \mathcal{F}_1) \vee \neg(\forall x. \mathcal{F}_2)$, (4a) DeMorgan

(6a) $I \models (\exists x. \neg\mathcal{F}_1) \vee (\exists x. \neg\mathcal{F}2)$, (5a) sustitución en esquemas válidos

(7aa) $I \models \exists x.\, \neg \mathcal{F}_1$, (6a), $\vee$

(8aa) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \neg \mathcal{F}_1$ para algún $v \in D_I$, (7aa), $\exists$

(9aa) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$, (2a), $\forall$

(10aa) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}_1$, (9aa), $\wedge$

(11aa) $I \models \perp$, (8aa) (10aa)

(7ab) $I \models \exists x.\, \neg \mathcal{F}_2$, (6a), $\vee$

(8ab) $I \lhd \{\mapsto v\} \models \neg \mathcal{F}_2$ para algún $v \in D_I$, (7ab), $\exists$

(9ab) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$, (2a), $\forall$

(10ab) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}_2$, (9ab), $\wedge$

(11ab) $I \models \perp$, (8ab) (10ab)

(2b) $I \not\models \forall x.\, \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$, (1), $\leftrightarrow$

(3b) $I \models (\forall x.\, \mathcal{F}_1) \wedge (\forall x.\, \mathcal{F}_2)$, (1), $\leftrightarrow$

(4b) $I \lhd \{x \mapsto v\} \not\models \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$ para algún $v \in D_I$, (2b), $\forall$

(5ba) $I \lhd \{x \mapsto v\} \not\models \mathcal{F}_1$, (4b), $\wedge$

(6ba) $I \models \forall x.\, \mathcal{F}_1$, (3b), $\wedge$

(7ba) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}_1$, (6ba), $\forall$

(8ba) $I \models \bot$, (5ba) (7ba)

(5bb) $I \lhd \{x \mapsto v\} \not\models \mathcal{F}_2$, (4b), $\wedge$

(6bb) $I \models \forall x.\, \mathcal{F}_2$, (3b), $\wedge$

(7bb) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}_2$, (6bb), $\forall$

(8bb) $I \models \bot$, (5bb) (7bb)