Sustitución

Renombramiento de una variable cuantificada. Si una variable x aparece acotada en la fórmula $\mathcal{F}$, por ejemplo $\mathcal{F}[\forall x. \mathcal{G}[x]]$ entonces el renombramiento de x a una variable x' fresca produce

$$\mathcal{F}[\forall x'. \mathcal{G}[x']].$$

donde “variable fresca” es cualquier variable que no aparezca en $\mathcal{F}$. Similarmente para cuantificador existencial.
Las variables que aparecen libres nunca se renombran.

Ejemplo

Sea

$$\mathcal{F} : p(x) \wedge \forall x.\, q(x, y)$$

podemos renombrar x como x' para obtener

$$\mathcal{F} : p(x) \wedge \forall x'.\, q(x', y)$$

Note que la primera aparición de x no se renombra pues esta aparece libre, y como se dijo antes, las variables libres nunca se renombran.

Sustituciones

Definición

Una **sustitución** *es una función de fórmulas en fórmulas:*

$$\sigma : \{\mathcal{F}_1 \mapsto \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \mapsto \mathcal{G}_n\}.$$

El **domino** *de* σ *es*

$$\mathrm{dom}(\sigma) = \{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n\}$$

y el **rango** *de* σ *es*

$$\mathrm{range}(\sigma) = \{\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n\}.$$

Al calcular la aplicación de σ a $\mathcal{F}$ se obtiene una nueva fórmula $\mathcal{F}\sigma$ de la siguiente forma:

- reemplazar cada ocurrencia de $\mathcal{F}_i$ por $\mathcal{G}_i$;
- cuando las fórmulas $\mathcal{F}_j$ y $\mathcal{F}_k$ en $\mathrm{dom}(\sigma)$ y $\mathcal{F}_k$ es subfórmula estricta de $\mathcal{F}_j$, se reemplazan las ocurrencias de $\mathcal{F}_j$ por $\mathcal{G}_j$.

Ejemplo

Sea

$$\mathcal{F} : (\forall x.\, p(x, y)) \to q(f(y), x)$$

y

$$\sigma : \{x \mapsto g(x), y \mapsto f(x), q(f(y), x) \mapsto \exists x.\, h(x, y)\}.$$

Resulta

$$\mathcal{F}\sigma : (\forall x.\, p(g(x), f(x))) \to \exists x.\, h(x, y).$$

La sustitución de una fórmula $\forall x.\, \mathcal{F}$ requiere que $\forall x.\, \mathcal{F}$ sea reemplazado.

Ejemplo

Sean

$$\mathcal{F} : \exists y.\, p(x, y) \wedge p(y, x)$$

y

$$\sigma : \{\exists y.\, p(x, y) \mapsto p(x, a)\}.$$

Entonces

$$\mathcal{F}\sigma : \exists y.\, p(x, y) \wedge p(y, x)$$

que es la misma $\mathcal{F}$, pues el cuerpo de $\exists y$ en $\mathcal{F}$ es $p(x, y) \wedge p(y, x)$ y no sólo $p(x, y)$.

Sustitución segura

Definición

1. *Sea σ una sustitución:*

$$\sigma : \{\mathcal{F}_1 \mapsto \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \mapsto \mathcal{G}_n\}$$

   El conjunto de **variables libres de** σ *es*

$$V_\sigma = \bigcup_i (\mathrm{free}(\mathcal{F}_i) \cup \mathrm{free}(\mathcal{G}_i))$$

2. *La* **sustitución segura** *de $\mathcal{F}\sigma$ se define como*
   2.1 *Renombrar cada variable cuantificada x en $\mathcal{F}$ tal que $x \in V_\sigma$ a una variable fresca para producir una fórmula $\mathcal{F}'$.*
   2.2 *Calcular $\mathcal{F}'\sigma$.*

Ejemplo

Sea

$$\mathcal{F} : (\forall x.\, p(x, y)) \rightarrow q(f(y), x)$$

con sustitución

$$\sigma : \{x \mapsto g(x), y \mapsto f(x), q(f(y), x) \mapsto \exists x.\, h(x, y)\}$$

. Haremos sustitución segura para $\mathcal{F}\sigma$. Primero calculamos las variables libres de σ:

$$\begin{aligned} V_\sigma = \mathrm{free}(x) \cup \mathrm{free}(g(x)) \cup \mathrm{free}(y) \cup (\mathrm{free}(f(x))) \\ \cup\, \mathrm{free}(q(f(x), x)) \cup \mathrm{free}(\exists x.\, h(x, y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \{x\} \cup \{x\} \cup \{y\} \cup \{x\} \cup \{y, x\} \cup \{y\} \\ &= \{x, y\} \end{aligned}$$

Enseguida renombramos cada variable libre de σ cuantificada en $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}' : (\forall x'.\, p(x', y)) \to q(f(y), x)$$

luego sustituimos:

$$\mathcal{F}'\sigma : (\forall x'.\, p(x', f(x))) \to \exists x.\, h(x, y).$$

El segundo paso de la sustitución segura se vuelve trivial si cada variable cuantificada tiene un nombre único.

Ejemplo

Sean

$$\mathcal{F} : (\forall z.\, p(z, y)) \to q(f(y), z)$$

$$\sigma : \{x \mapsto g(x), y \mapsto f(y), q(f(y), z) \mapsto \exists w.\, h(w, y)\}.$$

Calularemos sustitución segura:

$$\begin{aligned} V_\sigma = \mathrm{free}(x) \cup \mathrm{free}(g(x)) \cup \mathrm{free}(y) \cup \mathrm{free}(f(y)) \\ \cup\, \mathrm{free}(q(f(y), z)) \cup \mathrm{free}(\exists w.\, h(w, y)) \end{aligned}$$

$$= \{x, y, z\},$$

renombramos:

$$\mathcal{F}' : (\forall z'.\, p(z', y)) \to q(f(y), z)$$

sustituimos:

$$\mathcal{F}\sigma : (\forall z'.\, p(z', f(y))) \to \exists w.\, h(w, y)$$

Nótese que la variable cuantificada z en $\mathcal{F}$ tiene nombre diferente a la variable cuantificada w de σ.

Propiedad (Sustitución de fórmulas equivalentes)

Sea

$$\sigma : \{\mathcal{F}_1 \mapsto \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \mapsto \mathcal{G}_n\}$$

una sustitución tal que para para cada i, $\mathcal{F}_i \Leftrightarrow \mathcal{G}_i$. *Entonces*

$$\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}\sigma$$

cuando $\mathcal{F}\sigma$ *se calcula con sustitución segura.*