Definición

Sea $\mathcal{F}$ una fórmula tal que $\mathrm{free}(\mathcal{F}) \neq \varnothing$.

1. *$\mathcal{F}$ se dice* **satisfactible** *si $\exists * . \mathcal{F}$ es satisfactible.*
2. *$\mathcal{F}$ se dice* **válida** *si $\forall * . \mathcal{F}$ es válida.*

Definición

Sea I una interpretación. Una **variación** *J de I es una x_{i_k}-variación de una $x_{i_{k-1}}$-variación, ..., de una x_{i_1}-variación:*

$$J : I \lhd \{x_{i_1} \mapsto v_1\} \cdots \lhd \{x_{i_{k-1}} \mapsto v_{k-1}\}$$

Los razonamientos semánticos en FOL son la extensión de los de PL. Las reglas de deducción para los cuantificadores son:

- $$\frac{I \models \forall x.\, \mathcal{F}}{I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}} \text{ para cualquier } v \in D_I \text{ ``viejo''}$$

  donde variable vieja significa: introducida antes en la prueba.

- $$\frac{I \not\models \exists x.\, \mathcal{F}}{I \lhd \{x \models v\} \not\models \mathcal{F}} \text{ para cualquier } v \in D_I \text{ ``viejo''}$$

- $$\frac{I \models \exists x.\, \mathcal{F}}{I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}} \text{ para algún } v \in D_I \text{ ``nueva''}$$

  donde variable “nueva” significa una variable no usada en la prueba.

- $$\frac{I \not\models \forall x.\, \mathcal{F}}{I \lhd \{x \models v\} \not\models \mathcal{F}} \text{ para algún } v \in D_I \text{ ``nueva''}$$

- Regla de contradicción: sean J, K dos variaciones de una interpretación I.

$$\frac{\begin{array}{c} J \models p(s_1, \ldots, s_n) \\ K \not\models p(t_1, \ldots, t_n) \end{array}}{I \models \bot} \text{ si } \alpha_J[s_1] = \alpha_K[t_1], \ldots, \alpha_J[s_n] = \alpha_k[t_n]$$

Ejemplo

Probar que

$$\mathcal{F} : (\forall x.\, p(x)) \to (\forall y.\, p(y))$$

es válida.

Proof.

Por contradicción. Supongamos que existe I interpretación tal que $I \not\models \mathcal{F}$:

1. $I \not\models \mathcal{F}$, hip.
2. $I \models \forall x.\, p(x)$, (1) semántica de $\to$
3. $I \not\models \forall y.\, p(y)$, (1) semántica de $\to$
4. $J : I \lhd \{y \mapsto v\} \not\models p(y)$, para algún $v \in D_I$, (3) y semántica de $\forall$
5. $K : I \lhd \{x \mapsto v\} \models p(x)$, (2) y semántica de $\forall$
6. $I \models \bot$, (4), (5) regla de contradicción, pues $\alpha_J[y] = v = \alpha_K[x]$

$\square$

Ejemplo

Sea

$$\mathcal{F} : (\forall x.\, p(x)) \leftrightarrow (\neg\exists x.\, \neg p(x)).$$

Averiguar si es válida.

Sol. Supogamos que no es válida, entonces existe una interpretación I tal que

1. $I \not\models \mathcal{F}$

Entonces la prueba se ramifica: tenemos dos casos:

(2a) $I \models \forall x.\, p(x)$, (1) semántica de $\leftrightarrow$

(3a) $I \not\models \neg\exists x.\, \neg p(x)$, (1) semántica de $\leftrightarrow$

o bien

(2b) $I \not\models \forall x.\, \forall x.\, p(x)$, (1) semántica de $\leftrightarrow$

(3b) $I \models \neg\exists x.\, \neg p(x)$, (1) semántica de $\leftrightarrow$

Examinamos el primer caso:

(4a) $I \models \exists x. \neg p(x)$, (3a) semántica de $\neg$

(5a) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \neg p(x)$, para algún $v \in D_I$, (4a) y $\exists$

(6a) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models p(x)$, (2a) y $\forall$

(7a) $I \models \perp$, (5a), (6a) y regla de contradicción.

mientras que en el segundo caso:

(4b) $I \lhd \{x \mapsto v\} \not\models p(x)$ para algún $v \in D_I$, (2b) y $\forall$

(5b) $I \not\models \exists x. \neg p(x)$, (3b) y $\neg$

(6b) $I \lhd \{x \mapsto v\} \not\models \neg p(x)$, (5b) y $\exists$

(7b) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models p(x)$, (6b) y $\neg$

(8b) $I \models \perp$, (4b) , (7b) regla de contradicción.

Por lo tanto $\mathcal{F}$ es válida.

A veces es útil referenciar valores conocidos, como en el ejemplo siguiente.

Ejemplo

Sea

$$\mathcal{F} : p(a) \to \exists x.\, p(x)$$

es válida, pues si

1. $I \not\models \mathcal{F}$, hip.
2. $I \models p(a)$, (1) y $\to$
3. $I \not\models \exists x.\, p(x)$, (1) y $\to$
4. $K : I \triangleleft \{x \mapsto \alpha_I[a]\} \not\models p(x)$, (3) y $\exists$
5. $I \models \bot$, pues (2), (4) regla de contradicción, pues $\alpha_I[a] = \alpha_K[x]$

$\mathcal{F}$ es inválida ssi $\mathcal{F}$ no es válida ssi existe I tal que $I \not\models \mathcal{F}$ ssi $I \models \neg\mathcal{F}$. En resumen

$$\mathcal{F} \text{ es inválida ssi existe } I \text{ tal que } I \models \neg\mathcal{F}.$$

Ejemplo

Mostrar que

$$\mathcal{F} : (\forall x.\, p(x, x)) \rightarrow (\exists x.\, \forall y.\, p(x, y))$$

es inválida.

Sol. Tenemos que encontrar una interpretación I tal que $I \models \neg\mathcal{F}$, i.e., $I \not\models \mathcal{F}$, esto es

$$I \models \forall x.\, p(x, x) \text{ y } I \not\models (\exists x.\, \forall y.\, p(x, y)).$$

La asignación de la interpretación α_I tiene que asignar a p un predicado binario:

$$\underbrace{\alpha[p]}_{p_I} : D_I \times D_I \rightarrow \{\textbf{true}, \textbf{false}\}$$

Definimos el dominio de la interpretación como $D_I = \{0, 1\}$ y el predicado p_I como

$$p_I : (a, b) \in A$$

donde $A = \{(0, 0), (1, 1)\}$. Esto es:

$$p_I(a, b) = \textbf{true} \text{ ssi } (a, b) \in A.$$

Luego tenemos que checar que

1. $I \models \forall x.\, p(x, x)$
2. $I \not\models \exists x.\, \forall y.\, p(x, y)$

1. Todas las x-variaciones de I son
   1.1 $J_1 : I \lhd \{x \mapsto 0\}$
   1.2 $J_2 : I \lhd \{x \mapsto 1\}$

   pero $J_1 \models p(x,x)$ ssi $\alpha_{J_1}[p(x,x)] = \textbf{true}$. Calculemos

$$\begin{aligned} \alpha_{J_1}[p(x,x)] &= \alpha_{J_1}[p](\alpha_{J_1}[x], \alpha_{J_1}[x]) \\ &= p_I(0,0) \\ &= \textbf{true}, && \text{pues } (0,0) \in A, \end{aligned}$$

   por lo que $J_1 \models p(x,x)$. Similarmente $J_2 \models p(x,x)$. Por lo tanto

$$I \models \forall x.\, p(x,x).$$

2. Tenemos que checar que todas las x-variaciones de I no validan a $\forall y.\, p(x,y)$:
   2.1 $J_1 \not\models \forall y.\, p(x,y)$
   2.2 $J_2 \not\models \forall y.\, p(x,y)$

   2.1 Tenemos que checar, a su vez, que existe una y-variación de J_1 tal que
   $$J_1 \triangleleft \{y \mapsto y\} \not\models p(x,y).$$
   Consideremos $K_1 : J_1 \triangleleft \{y \mapsto 1\}$. Luego
   $$\begin{aligned} \alpha_{K_1}[p(x,y)] &= \alpha_{K_1}[p](\alpha_{K_1}[x], \alpha_{K_1}[y]) \\ &= p_I(0,1) \\ &= \textbf{false}, && \text{pues } (0,1) \notin A, \end{aligned}$$
   lo que implica, por definición que $K_1 \not\models p(x,y)$, luego
   $$J_1 \not\models \forall y.\, p(x,y)$$
   .
   2.2 Similar al anterior.

Tarea

Identifique si las siguientes son válidas o no. Si lo son, pruébelo con una demostración semántica. Si no lo es identifique una interpretación que falsifique.

1. $(\forall x, y.\, p(x, y) \to p(y, x)) \to \forall z,\ p(z, z)$
2. $\forall x, y.\, p(x, y) \to p(y, x) \to \forall z.\, p(z, z)$
3. $(\exists x.\, p(x)) \to \forall y.\, p(y)$
4. $(\forall x.\, p(x))) \to \exists y.\, p(y)$
5. $\exists y.\, (p(x, y) \to (p(y, x) \to \forall z.p(z, z)))$