Definición

1. $I \models \forall x. \mathcal{F}$ *ssi para todo* $v \in D_I$, $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}$
2. $I \models \exists x. \mathcal{F}$ *ssi existe* $v \in D_I$, $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}$

Esto se $I \models \forall x. \mathcal{F}$ ssi todas las x-variaciones de I validan a $\mathcal{F}$, mientras que $I \models \exists. \mathcal{F}$ ssi existe una x-variación de I que valida a $\mathcal{F}$.

Ejemplo

Sea

$$\mathcal{F} : \exists x.\, f(x) = g(x)$$

con interpretación $I : (\{\circ, \bullet\}, \alpha_I)$ donde

$$\alpha_I : \{f(\circ) \mapsto \circ, f(\bullet) \mapsto \bullet, g(\circ) \mapsto \bullet, g(\bullet) \mapsto \circ\}$$

Sólo hay dos x-variaciones de I:

1. $J_1 : I \triangleleft \{x \mapsto \circ\};\ I \triangleleft \{x \mapsto \circ\} \not\models f(x) = g(x)$
2. $J_2 : I \triangleleft \{x \mapsto \bullet\};\ I \triangleleft \{x \mapsto \bullet\} \not\models f(x) = g(x)$

esto significa que

$$I \triangleleft \{x \mapsto v\} \not\models f(x) = g(x), \text{ para todo } v \in D_I : \{\circ, \bullet\}$$

luego, por definición,

$$I \not\models \exists x.\, f(x) = g(x)$$

Tarea

Escribir como fórmulas de FOL las siguientes. Identificar términos variables, constantes, predicados, funciones, variables libre y acotadas.

1. *Dado cualquier entero mayor que 2, existen dos numeros primos cuya suma es el entero dado*
2. *Entre dos numeros reales diferentes existe un numero real.*
3. *Si n es un entero positivo entonces la suma de los primeros n enteros es igual a la mitad del producto de n y su sucesor.*

Satisfactibilidad y Validez

Definición

Sea $\mathcal{F}$ *una fórmula tal que* $\mathrm{free}(\mathcal{F}) = \varnothing$.

1. $\mathcal{F}$ *se dice* **satisfactible** *ssi existe una interpretación* I *tal que* $I \models \mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}$ *se dice* **válida** *ssi para toda interpretación* I *se cumple que* $I \models \mathcal{F}$.

Como antes, $\mathcal{F}$ es válida ssi $\neg\mathcal{F}$ es insatisfactible.

Definición

Sea $\mathcal{F}$ *una fórmula tal que* $\mathrm{free}(\mathcal{F}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

1. *La clausura universal de* $\mathcal{F}$ *se denota con* $\forall * .\mathcal{F}$ *y esta es*

$$\forall x_1 . \forall x_2 . \ldots . \forall x_n . \mathcal{F}$$

2. *La clausura existencial de* $\mathcal{F}$ *se denota con* $\exists * .\mathcal{F}$ *y esta es*

$$\exists x_1 . \exists x_2 . \ldots . \exists x_n . \mathcal{F}$$

Ejemplo

Sea

$$\mathcal{F} : p(f(x, y), z) \to p(y, g(z, x))$$

Tenemos que $\mathrm{free}(\mathcal{F}) = \{x, y, z\}$. Entonces su clausura universal

$$\forall * .\, p(f(x, y), z) \to p(y, g(z, x))$$

es

$$\forall x, y, z.\, p(f(x, y), z) \to p(y, g(z, x))$$

es decir,

$$\forall x.\forall y.\forall z.\, p(f(x, y), z) \to p(y, g(z, x)).$$

Mientras que la clausura existencial

$$\exists * . \, p(f(x,y),z) \to p(y,g(z,x))$$

es

$$\exists x,y,z. \, p(f(x,y),z) \to p(y,g(z,x))$$

que significa

$$\exists x. \exists y. \exists z. \, p(f(x,y),z) \to p(y,g(z,x))$$

Ejemplo

Sea

$$\mathcal{F} : \forall x.\, p(f(x), y) \rightarrow \forall y.\, p(f(x), y)$$

Como $\text{free}(\mathcal{F}) = \{y\}$ entonces

$$\forall * .\, \mathcal{F} :\ \forall y, x.\, p(f(x), y) \rightarrow \forall y.\, p(f(x), y)$$

y

$$\exists * .\, \mathcal{F} :\ \exists y.\, \forall x.\, p(f(x), y) \rightarrow \forall y.\, p(f(x), y)$$