Semántica

Definición

Una **interpretación** I *en FOL consiste de:*

1. *Un* **dominio de interpretación (universo de discurso)** D_I *que es un conjunto no vacío.*
2. **Asignaciones** α_I *que aplica contantes, funciones y predicados a elementos, funciones y predicados sobre* D_I *y también aplica variables a elementos de* D_I*:*
   2.1 *a cada variable* x *le asigna un elementos* $x_I \in D_I$*;*
   2.2 *a cada función* f *se le asigna una función n-aria:*
   $$f_I : D_I^n \to D_I$$
   que aplica a n elementos de D_I *un elemento de* D_I*;*
   2.3 *cada predicado n-ario se le asigna un predicado n-ario*
   $$p_I : D_I^n \to \{\textbf{false}, \textbf{true}\}.$$

En particular, a cada constante (función 0-aria) se le asigna un valor en D_I y a cada variable proposicional (predicado 0-ario) se le asigna un valor de verdad.
Es decir, una interpretación I es un par (D_I, α_I).

Ejemplo

Sea

$$\mathcal{F} : p(f(x, y), z) \rightarrow p(y, g(z, x))$$

con interpretación $I : (\mathbb{Z}, \alpha_I)$ donde

$$\alpha_I : \{f \mapsto +, g \mapsto -, p \mapsto >, x \mapsto 13, y \mapsto 42, z \mapsto 1, \ldots\}$$

entonces

$$\mathcal{F}_I : 13 + 42 > 1 \rightarrow 42 > 1 - 13$$

Definición

Sea $\mathcal{F}$ *una fórmula y* $I : (D_I, \alpha_I)$ *una interpretación. Escribimos*

$$I \models \mathcal{F}$$

(que se lee: I *valida a* $\mathcal{F}$*), si* $\mathcal{F}$ *se evalua a* **true** *bajo la interpretación. En caso contrario se escribe*

$$I \not\models \mathcal{F}.$$

Definición

Sea I *una interpretación arbitraria. Se definen*

- $I \models \top$
- $I \not\models \bot$

Es decir todas las interpretaciones validan a $\top$*, mientras que ninguna interpretación valida a* $\bot$*.*

Definición

1. *Si $I : (D_I, \alpha_I)$ es una interpretación, x variable, c constate y f función, entonces sus asignaciones se denotan como:*

$$\alpha_I[x], \quad \alpha_I[c], \quad \alpha_I[f].$$

2. *Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos y f función n-aria, la asignación del término $f(t_1, \ldots, t_n)$ es*

$$\alpha_I[f(t_1, \ldots, t_n)] = \alpha_I[f](\alpha_I[t_1], \ldots, \alpha_I[t_n])$$

3. *Si p es un predicado n-ario y $t_1, \ldots, t_n$ términos, entonces*

$$\alpha_I[p(t_1, \ldots, t_n)] = \alpha_I[p](\alpha_I[t_1], \ldots, \alpha_I[t_n])$$

y $I \models p(t_1, \ldots, t_n)$ si y sólo si $\alpha_I[p(t_1, \ldots, t_n)] = \textbf{true}$.

Lo anterior define interpretaciones para los casos base. En el caso inductivo tenemos:

Definición

Si $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ *son fórmulas,* I *una interpretación:*

- $I \models \neg\mathcal{F}$ *ssi* $I \not\models \mathcal{F}$
- $I \models \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$ *ssi* $I \models \mathcal{F}_1$ *y* $I \models \mathcal{F}_2$
- $I \models \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F} - 2$ *ssi* $I \models \mathcal{F}_2$ *o* $I \models \mathcal{F}_2$
- $I \models \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ *ssi, si* $I \models \mathcal{F}_1$ *entonces* $I \models \mathcal{F}_2$

Ejemplo

En la fórmula del ejemplo anterior:
$\mathcal{F} : p(f(x,y),z) \to p(y, g(z,x))$
donde

$$\alpha_I : \{p \mapsto >, f \mapsto +, g \mapsto -, x \mapsto 13, y \mapsto 42, z \mapsto 1\}$$

calculamos su valor de verdad como sigue: tenemos que $I \models \mathcal{F}$ si y sólo si es cierto que $I \models p(f(x,y),z)$ entonces $I \models p(y, g(z,x))$ es cierta. Pero $I \models p(f(x,y),z)$ si y sólo si $\alpha_I[p(f(x,y),z)] = \textbf{true}$; a su vez

$$\begin{aligned}
\alpha_I[p(f(x,y),z)] &= \alpha_I[p](\alpha_I[f(x,y), \alpha_I(z)]), && \text{por definición} \\
&= > (\alpha_I[f](\alpha_I[x], \alpha_I[y]), 1) \\
&= > (+(13, 42), 1) && \text{notación prefix para } +, > \\
&= > (13 + 42, 1) && \text{notación infix para } + \\
&= 13 + 42 > 1 && \text{notación infix para } > \\
&= \textbf{true}
\end{aligned}$$

por lo que

$$I \models p(f(x,y),z).$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
\alpha_I[p(y,g(z,x))] &= \alpha_I[p](\alpha_I[y],\alpha_I[g(z,x)]) \\
&= >(42,\alpha_I[g](\alpha_I[z],\alpha_I[x])) \\
&= >(42,-(1,13)) \\
&= 42 > 1-13 \\
&= \textbf{true}
\end{aligned}$$

luego

$$I \models p(y,g(z,x))$$

por lo que la afirmación $I \models p(f(x,y),z) \rightarrow I \models p(y,g(z,x))$ es cierta. Por lo tanto

$$I \models \mathcal{F}.$$

Para calcular el valor de verdad de proposiciones cuantificadas necesitamos del concepto de x-*variación*.

Definición

*Sea x una variable. Una x-**variación** de una interpretación $I : (D_I, \alpha_I)$ es una interpretación $J : (D_J, \alpha_J)$ tal que*

1. $D_J = D_I$
2. $\alpha_J[u] = \alpha[u]$ *para todas las constantes, variables, funciones y predicados u excepto posiblemente en x.*

Con

$$I \lhd \{x \mapsto v\}$$

se denota a la x-variación J de I tal que $\alpha_J[x] = v$ para algún $v \in D_I$.

Ejemplo

Sea $I : (D_I, \alpha_I)$ una interpretación donde $\mathcal{D}_I = \mathbb{Z}$ y

$$\alpha_I : \{p \mapsto >, f \mapsto +, g \mapsto -, x \mapsto 13, y \mapsto 42, z \mapsto 1\}$$

Una x-variación de I es $J : (\mathbb{Z}, \alpha_J)$ donde

$$\alpha_J : \{p \mapsto >, f \mapsto +, g \mapsto -, x \mapsto 14, y \mapsto 42, z \mapsto 1\}$$

que se denota $I \lhd \{x \mapsto 14\}$. Otra x-variación de I viene dada por

$$\{p \mapsto >, f \mapsto +, g \mapsto -, x \mapsto -4, y \mapsto 42, z \mapsto 1\}$$

que se denota como $I \lhd \{x \mapsto -4\}$. Una z-variación es:

$$\{p \mapsto >, f \mapsto +, g \mapsto -, x \mapsto 13, y \mapsto 42, z \mapsto 0\}$$

que es $I \lhd \{z \mapsto 0\}$.